A la même Librairie :

COURS DE MATHÉMATIQUES, par M. ÉMILE BOREL, maître de conférences à l'École Normale supérieure :

ARITHMÉTIQUE (*Classe de Quatrième B*). In-18, relié toile. 2 »
ARITHMÉTIQUE et Notions d'Algèbre (*Troisième A*). . 2.50
ALGÈBRE (*1er Cycle*). In-18, relié toile. 2.50
ALGÈBRE (*2d Cycle*). In-18, relié toile. . . . . 3 »
TRIGONOMÉTRIE (*2d Cycle*). In-18, relié toile. 2.50
MÉCANIQUE (*Classe de Première C et D*), par MM. APPELL, Membre de l'Institut, et CHAPPUIS, Professeur à l'École Centrale. In-18, relié toile. . . . . 3 »

COURS DE PHYSIQUE ET CHIMIE, à l'usage du 2d cycle, par M. E. DRINCOURT, agrégé des sciences physiques et naturelles, professeur au Collège Rollin :

PHYSIQUE (*Classe de Seconde C, D et A, B*). In-12, cart. 3.50
CHIMIE (*Classe de Seconde C, D*). In-12, cartonné. . . . 2.50
PHYSIQUE (*Classe de Première C, D*). In-12, toile. . . . 3.50
CHIMIE (*Classe de Première C, D*). In-12, toile. . . . . 2 »
PHYSIQUE (*Classe de Première A, B*). In-12, toile. . . . 2 »
CHIMIE (*Classe de Philosophie A, B*). In-12, toile. 2.75
PHYSIQUE (*Classe de Mathématiques A, B*). In-12, toile. 3 »
CHIMIE (*Classe de Mathématiques A, B*). In-12, toile. . 2.75

COURS DE SCIENCES NATURELLES, à l'usage du 2d Cycle, par MM. G. COLOMB, docteur ès sciences, sous-directeur du Laboratoire de Botanique de la Sorbonne, et C. HOULBERT, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Rennes :

GÉOLOGIE : Époques géologiques (*Cl. de Seconde A, B, C, D*). 2.50
ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALES ET VÉGÉTALES (*Classes de Philosophie A et B et de Mathématiques A et B*). » »



COURS DE MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX NOUVEAUX PROGRAMMES

(31 Mai 1902)



ALGÈBRE

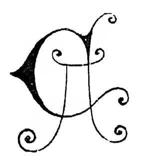
SECOND CYCLE

PAR

ÉMILE BOREL

Maître de Conférenees à l'École Normale Supérieure.

DEUXIÈME ÉDITION



Paris

LIBRAIRIE ARMAND COLIN

5, Rue de Mézières

1904

PROGRAMMES OFFICIELS DU 31 MAI 1902

ALGÈBRE

Classe de Seconde (Sections C et D).

Revision des opérations sur les nombres positifs ou négatifs; extension aux fractions algébriques des propriétés démontrées en arithmétique.

Monômes; polynomes; termes semblables.

Opérations . Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynomes. — Division des monômes.

Résolution des équations du premier degré à une inconnue. — Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues. — Inégalité du premier degré. — Problèmes; mise en équation. — Discussion des résultats.

Variations de l'expression $ax + b$; représentation graphique.

Équation du second degré à une inconnue. — On ne fera pas la théorie des imaginaires. — Relations entre les coefficients et les racines. Nature et signe des racines. — Étude du trinome du second degré. Changements de signes. Inégalités du second degré. Problèmes du second degré. Variations du trinome du second degré; représentation graphique.

Variations de l'expression $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; représentation graphique.

Notion de la dérivée; signification géométrique de la dérivée. — Le sens de la variation est indiqué par le signe de la dérivée; application à des exemples numériques très simples.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques.

Logarithmes. — Usage des tables de logarithmes à quatre et à cinq décimales.

Intérêts composés.

Pour ce qui est des logarithmes, on se proposera essentiellement de familiariser les élèves avec l'usage des tables. — On introduira les logarithmes en ne considérant que les nombres qui font partie de la progression géométrique, dont on supposera la raison très voisine de 1, et l'on admettra l'existence d'un système de logarithmes dans lequel le logarithme de 10 est égal à 1.

Classe de Première (Sections C et D).

Revision du programme de la classe précédente.

Les professeurs devront appliquer les théories de l'algèbre à de nombreux exemples empruntés soit à l'algèbre, soit à la trigonométrie, soit à la géométrie.

PRÉFACE DE L'ALGÈBRE

(PREMIER CYCLE)

En écrivant ce livre, mon but principal a été d'intéresser les élèves; je ne crois pas que le meilleur moyen de les initier aux sciences mathématiques soit d'insister sur les côtés les plus abstraits de ces sciences, de manière à les présenter comme complètement en dehors et au-dessus de la réalité. Quel que puisse être l'intérêt — que je suis loin de contester — de la spéculation pure, il n'est pas douteux que c'est l'observation des faits les plus usuels et les nécessités de la vie pratique qui ont été l'origine de toutes les sciences A méconnaître cette origine, on s'expose à dégoûter un grand nombre d'excellents esprits, auxquels la science apparaît comme une chose mystérieuse, complètement à part de la vie, alors qu'elle s'y mêle chaque jour.

C'est cette liaison intime entre les formules de l'Algèbre et la réalité journalière que j'ai cherché à mettre en évidence le plus possible, soit dans la théorie, soit dans les exemples, problèmes et exercices; je n'ai pas craint de multiplier les applications, de manière que la théorie apparaisse comme intuitive, et non comme une construction arbitraire de l'esprit;

la définition des nombres négatifs, les règles de la multiplication des nombres positifs et négatifs, la mise en équations des problèmes, la représentation graphique des fonctions, et en particulier de la fonction linéaire, sont illustrées de nombreux exemples concrets. J'ai, de même, insisté beaucoup, à diverses reprises, sur le *choix des unités*, dans les problèmes et les formules.

Les nouveaux programmes prévoient qu'un certain nombre d'élèves terminent leurs études secondaires avec le premier cycle; ils doivent avoir acquis les connaissances pratiques indispensables aux applications usuelles au commerce et à l'industrie : j'espère qu'ils les trouveront ici, en ce qui concerne l'Algèbre.

En même temps, je n'ai négligé aucune occasion d'introduire, toutes les fois qu'on pouvait le faire sans allonger ni compliquer, les notions et les formes de raisonnement dont la connaissance simplifiera la tâche ultérieure de ceux qui pousseront plus loin l'étude de l'Algèbre.

En résumé, j'ai tâché, sans abandonner jamais la rigueur nécessaire, d'être aussi simple et pratique que possible. Je crois avoir été ainsi fidèle à l'esprit des nouveaux programmes qui, s'ils sont appliqués avec les idées de réforme qui ont présidé à leur élaboration, peuvent être l'origine d'une ère nouvelle pour notre enseignement secondaire.

ÉMILE BOREL.

Paris, 25 mars 1903.

PRÉFACE DE L'ALGÈBRE

(SECOND CYCLE)

Je me suis inspiré pour ce second livre d'Algèbre des mêmes idées que pour le premier; les élèves auxquels il s'adresse étant plus âgés, j'ai dû, conformément au Programme, développer un peu plus certaines théories abstraites relatives notamment aux systèmes d'équations du premier degré et au trinome du second degré; mais c'est surtout à la partie concrète que j'ai donné tous mes soins.

Je souhaite assurément que, parmi les lecteurs de ce livre, il y en ait qui commencent à goûter la beauté propre de l'Algèbre et à rechercher dans l'élégance de ses formules des jouissances esthétiques; mais c'est là l'apanage d'un petit nombre; pour la plupart, l'Algèbre n'est et ne peut être qu'un instrument utile et commode

Il est donc essentiel de bien connaître, encore plus que les formules, les liens entre ces formules et la réalité; apprendre une théorie et ne pas apprendre à s'en servir est simplement perdre son temps. Aussi ai-je développé beaucoup les applications pratiques, les exemples numériques, signalé les représentations graphiques effectivement utilisées dans un but précis par les praticiens.

L'une des principales innovations des nouveaux programmes est l'introduction dans les éléments de la notion de dérivée; cette innovation me paraît d'ailleurs justifiée par l'impor-

tance extrême de cette notion en même temps que par sa très grande simplicité, si l'on se borne à une définition concrète, sans entrer dans les détails qu'exige une exposition rigoureuse.

Mais les avantages que l'on peut espérer retirer de cette introduction disparaîtraient pour faire place à des inconvénients si la théorie des dérivées était enseignée aux élèves de seconde de la même manière qu'aux élèves de mathématiques spéciales. Il faut les familiariser simplement avec la notion géométrique et le calcul pratique des dérivées des fonctions simples. C'est ce que j'ai cherché à faire dans le premier paragraphe du chapitre IX; dans le second paragraphe du même chapitre (imprimé en petits caractères), que je n'ai ajouté qu'après bien des hésitations, j'introduis la notion plus abstraite de limite; j'ai pensé que ces quelques pages pourraient intéresser quelques-uns des meilleurs élèves de Première, mais je crois que ce serait une erreur d'enseigner ainsi la théorie des dérivées à de jeunes élèves qui la verraient pour la première fois.

Il me reste, en terminant, à remercier tous ceux qui, après avoir lu mon Algèbre (premier cycle) m'ont encouragé à poursuivre la tâche commencée; j'ai fait de mon mieux pour ne pas décevoir leur confiance; je serai heureux si les professeurs qui utilisent ce livre veulent bien m'en signaler les lacunes et les défauts et me permettre ainsi de me rapprocher de l'idéal que je m'étais proposé : être clair, simple et pratique

ÉMILE BOREL.

Paris, août 1903.

ALGÈBRE

SECOND CYCLE

CHAPITRE I

REVISION

I. FORMULES ALGÉBRIQUES

1. Définition. — *Une expression algébrique est un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par les signes des opérations arithmétiques élémentaires, de telle manière que, si l'on remplace chaque lettre par un nombre, les règles de l'arithmétique permettent d'effectuer les opérations indiquées; le résultat final du calcul est dit la valeur numérique de l'expression pour les valeurs particulières données aux lettres.*

Lorsque les expressions algébriques sont compliquées, il pourrait y avoir des doutes sur la marche à suivre pour calculer leur valeur numérique, si l'on ne faisait pas, à ce sujet, *des conventions très précises.*

Soit, pour fixer les idées, à calculer la valeur numérique de l'expression

$$a + bc,$$

dans laquelle on suppose :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4.$$

Si l'on n'avait fait aucune convention, on pour-it hésiter entre les deux modes suivants : ou bien ultiplier 3 par 4 et ajouter le produit à 2, ce qui onne :

$$2 + 12 = 14,$$

ou bien ajouter 2 à 3 et multiplier la somme par 4, ce qui donne :

$$5 \times 4 = 20.$$

On convient d'adopter *le premier mode;* le second mode donne, par définition, la valeur numérique de l'expression

$$(a + b)c,$$

qui diffère de l'expression proposée en ce que la somme $a + b$ s'y trouve placée entre parenthèses.

Nous énoncerons donc les règles suivantes, conséquence des conventions adoptées pour l'écriture des expressions algébriques.

Règle I. — *Pour calculer la valeur numérique d'une expression algébrique sans parenthèses, on effectue d'abord les multiplications et divisions indiquées, et ensuite les additions et soustractions.*

Dans le cas où il y a des parenthèses, on commence par calculer chaque parenthèse isolément d'après la règle précédente et ensuite on applique cette règle aux opérations restantes.

Règle II. — *Les expressions numérateurs et dénominateurs des fractions, ainsi que les expressions placées sous des radicaux, doivent être calculées comme si elles étaient entre parenthèses.*

Dans certaines formules, on se trouve conduit à *superposer* les parenthèses, c'est-à-dire à employer plusieurs sortes de parenthèses de formes différentes, comprises les unes dans les autres ; dans ce cas, on doit d'abord calculer les parenthèses intérieures, puis celles qui comprennent celles-là, etc.

Comme exemple, considérons l'expression

$$\left[\left(\frac{a+b}{c+\sqrt{a^2+7}}+c\right)a+1\right]\left[\left(\sqrt{b^2-3}+c\right)(a-2)+\sqrt{a\,(b+c)}\right]$$

dans laquelle on suppose :

$$a=3 \qquad b=2 \qquad c=1,$$

sa valeur est :

$$\left[\left(\frac{5}{1+\sqrt{16}}+1\right)3+1\right]\left[(1+1)\,1+\sqrt{3\times 3}\right],$$

c'est-à-dire :

$$(2\times 3+1)\,(2+3)=7\times 5=35.$$

2. — Nous apprendrons plus loin, en étudiant le calcul algébrique, à transformer les expressions algébriques, c'est-à-dire à remplacer une expression algébrique par une expression algébrique *équivalente*. On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes* lorsqu'elles prennent la même valeur numérique *dans tous les cas*, c'est-à-dire quelle que soit la manière dont on choisit les valeurs numéri-

ques des diverses lettres qui y figurent. Par exemple, on constate aisément que les deux expressions

$$(a + b)(a - b)$$
$$a^2 - b^2$$

sont équivalentes.

Mais, bien qu'il soit en général possible, en appliquant les règles du calcul algébrique, de faire disparaître la plupart des parenthèses, c'est-à-dire de remplacer une expression renfermant des parenthèses par une expression équivalente n'en renfermant plus, il est utile de savoir calculer directement la valeur numérique d'une expression compliquée de parenthèses. On en trouvera des exemples dans les exercices sur ce premier chapitre.

3. Remarques sur le choix des unités. — Lorsque l'on applique une formule à un problème concret quelconque, le résultat est généralement un nombre concret; c'est un certain nombre de francs, de mètres, de kilogrammes, etc. De même, les nombres qui figurent dans la formule sont aussi des nombres concrets. Dans ce cas, il est essentiel de remarquer que *la formule n'est exacte que si les divers nombres concrets qui y figurent sont mesurés avec des unités appropriées;* en même temps que l'on donne la formule, *il est indispensable de faire connaître ces unités; sans quoi la formule n'a pas de sens.* Par exemple, considérons un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle et rempli avec de l'eau à son maximum de densité. Si les dimensions des arêtes du parallélépipède sont désignées par a, b, c, le poids P de l'eau est donné

par la formule

$$P = abc.$$

Cette formule n'a un sens que si l'on ajoute que, a, b, c, désignant des décimètres, P désignera des kilogrammes.

Il serait d'ailleurs possible de dire aussi que a, b, c sont exprimés en mètres et P en tonnes, ou que a, b, c, sont exprimés en centimètres et P en grammes; il y a toujours, pour une même formule, bien des manières différentes de choisir les unités; mais nous n'avons pas à étudier ici les relations qu'ont entre elles ces diverses manières; ce qui est essentiel, c'est de ne pas oublier le principe suivant:

Toute formule renfermant des grandeurs concrètes est démontrée en supposant ces grandeurs mesurées avec certaines unités; pour se servir de la formule, il est aussi nécessaire de connaître ces unités que la formule elle-même.

4. Remarque sur les notations en algèbre. — Dans l'Algèbre élémentaire, l'emploi des lettres est surtout un *langage abrégé;* on dira a francs au lieu de dire *un certain nombre de francs* ou *la somme indiquée dans l'énoncé*. Comme tout langage, la notation algébrique est *arbitraire;* c'est-à-dire que nous pouvons, à notre choix, lorsque nous voulons désigner un certain nombre de francs, le désigner par a, ou par b, ou par A, ou par Z, etc. La seule chose qui soit indispensable, c'est que la notation soit *cohérente*. On entend par là que, dans une même question, une lettre déterminée a un sens unique et bien déterminé, c'est-à-dire désigne une seule quantité, et toujours la même.

Ce serait cependant une grave erreur de croire qu'il est complètement indifférent de choisir telle ou telle notation; lorsque, dans une même question, on introduit un grand nombre de lettres, il y a très grand avantage à ne pas les introduire au hasard, mais à suivre des règles consacrées par l'usage, auxquelles on s'habitue très vite[1]. L'un des plus anciens de ces usages consiste à désigner les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet : a, b, c, d, f, g, h, et les quantités inconnues par les dernières : x, y, z, u, v, w.

Mais ce n'est pas tout : il est certaines associations de lettres qui sont plus habituelles que d'autres; de telle manière que les algébristes regardent certains groupes de lettres de l'alphabet, formés généralement de lettres consécutives, comme devant être introduits simultanément. Ainsi, si l'on a trois quantités analogues, on les désigne volontiers par a, b, c, ou par f, g, h, ou par l, m, n, ou par p, q, r, ou par x, y, z, ou par u, v, w. Mais on n'a pas l'habitude de les désigner par n, o, p, par exemple, ou par e, f, g. De plus, on associe volontiers entre elles les lettres occupant le même rang dans chacun de ces groupes. Par exemple, si l'on a trois sommes d'argent placées à intérêt à trois taux différents, on désignera les trois sommes par a, b, c, les trois taux

1. Il est clair qu'un langage quelconque est d'autant plus aisé à retenir qu'il est plus cohérent, même si ce langage n'est créé que pour quelques instants. Par exemple, on éprouverait des difficultés sérieuses à parler, ne fût-ce que pendant peu de temps, une langue dans laquelle les verbes *entrer* et *sortir* auraient la même

par p, q, r, et les valeurs de ces sommes au bout d'un an par x, y, z, de telle manière que l'on aura :

$$x = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$y = b\left(1 + \frac{q}{100}\right)$$

$$z = c\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Ces formules sont plus aisées à écrire sans erreur que ne le seraient les suivantes :

$$z = a\left(1 + \frac{q}{100}\right)$$

$$x = b\left(1 + \frac{d}{100}\right)$$

$$y = r\left(1 + \frac{c}{100}\right).$$

dans lesquelles les trois sommes sont désignées par a, b, r leurs valeurs au bout d'un an par z, x, y, et les trois taux par q, d, c.

On emploie aussi quelquefois, en même temps que les petites lettres, les grandes lettres de même nom A, B, C, X, Y, Z; mais on évite cet emploi des grandes lettres dans les questions où il pourrait y avoir confusion avec les notations de la géométrie.

Les lettres grecques sont d'un usage plus fréquent; on les introduit aussi par groupes, correspondant à certains groupes de lettres usuelles; ainsi α, β, γ (alpha, bêta, gamma) correspondent à : a, b, c; λ, μ, ν (lambda, mu, nu) correspondent

à l, m, n; ξ, η, ζ (ksi, êta, dzêta) correspondent[1] à x, y, z. Nous éviterons le plus possible l'emploi de ces lettres dans le cours, afin de ne pas ajouter de difficulté supplémentaire pour les élèves auxquels elles ne sont pas familières, mais nous les introduirons dans quelques exercices, car il est nécessaire de s'habituer peu à peu à leur emploi, presque indispensable quand on pousse un peu loin l'étude des mathématiques.

Les notations que nous venons d'indiquer suffisent pour traiter les questions où s'introduisent un petit nombre de quantités analogues; lorsqu'il y en a un grand nombre, on épuiserait vite l'alphabet et l'on aurait des notations difficiles à retenir; aussi est-il préférable, dans ce cas, de désigner les quantités analogues *par une même lettre affectée de divers indices*, c'est-à-dire par a_0, a_1, a_2, a_3..., que l'on énonce *a indice zéro, a indice un, a indice deux*, etc. Dans les cas où l'on ne craint pas de confusion avec la notation des exposants on dit quelquefois, plus brièvement, *a zéro, a un, a deux*, etc. On emploie aussi les notations a', a'', a''', a^{IV},... que l'on énonce *a prime, a seconde, a tierce, a quarte*. ...

Supposons, par exemple, que nous voulions écrire une formule indiquant la somme x possédée au bout d'un an par un capitaliste qui, ayant partagé sa fortune en six parties inégales, l'a placée à six taux différents; nous désignerons les parties de la fortune par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 et les taux correspon-

1. C'est en vertu d'un usage que l'on fait correspondre η à y; il ne semble pas qu'il y ait de raison autre que l'analogie de forme entre les caractères.

dants par p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, de sorte que nous aurons :

$$x = a_1\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) + a_2\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) + a_3\left(1 + \frac{p_3}{100}\right)$$
$$+ a_4\left(1 + \frac{p_4}{100}\right) + a_5\left(1 + \frac{p_5}{100}\right) + a_6\left(1 + \frac{p_6}{100}\right).$$

Cette formule est évidemment bien plus simple à écrire et à employer avec ces notations qu'elle ne l'aurait été si l'on avait employé douze lettres différentes, choisies complètement au hasard.

II. NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

5. Définition. — Il arrive fréquemment que l'on considère des grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés : par exemple, le temps peut être compté dans le présent ou dans l'avenir; une longueur sur une droite peut être portée dans un sens ou dans l'autre; les sommes qu'inscrit un commerçant sur son livre de caisse peuvent être des recettes ou des dépenses, etc.

Dans ces divers cas, il est commode, au lieu d'employer un langage plus ou moins long pour indiquer quel est le sens de la grandeur qui correspond à un nombre donné, de convenir d'une *notation abrégée;* telle est l'origine des nombres négatifs.

Par exemple, au lieu d'inscrire 50fr de recettes, nous pourrons écrire $+50$ et au lieu d'écrire 35fr de dépenses, nous pourrons écrire -35; au lieu d'écrire que le thermomètre marque 2° au-dessus

de zéro nous dirons qu'il marque + 2, et au lieu de dire qu'il marque 6° au-dessous de zéro, nous dirons qu'il marque — 6.

Cette notation abrégée est particulièrement utile dans l'étude des longueurs comptées sur une ligne indéfinie, droite ou courbe.

Pour avoir une image aussi simple que possible figurons une droite indéfinie sur laquelle nous aurons choisi un sens de parcours que nous appellerons *sens positif* et que nous indiquerons par une flèche; une telle droite s'appelle un *axe orienté* ou, plus brièvement, un *axe*. Le sens opposé au sens positif est le *sens négatif*.

On peut imaginer un promeneur qui marcherait sur l'axe, allant tantôt en avant, tantôt à reculons, mais *en regardant toujours vers la direction positive*. Pour aller de A en B (fig 1) le promeneur mar-

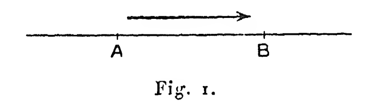


Fig. 1.

cherait en avant; pour aller de B en A, il irait à reculons. Si ce promeneur fait des pas égaux, il peut mesurer les distances en comptant le nombre de ses pas; *nous considérerons comme positifs les pas faits en avant et comme négatifs les pas faits à reculons;* de telle sorte que s'il lui faut 50 pas pour parcourir la distance AB on dira que de A vers B il y a + 50 et que de B vers A il y a — 50.

On donne le nom de *segment* à une portion d'un axe, lorsque l'on porte son attention sur le sens dans lequel elle est parcourue. Ainsi, lorsque le pro-

meneur va de A vers B, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{AB}$; lorsqu'il va de B vers A, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{BA}$. Ainsi $\overline{AB}$ n'est pas la même chose que $\overline{BA}$: le segment $\overline{AB}$ a pour *origine* A et pour *extrémité* B; $\overline{BA}$ a pour origine B et pour extrémité A. Dans les deux cas on parcourt la même distance, désignée indifféremment par la notation AB ou la notation BA, mais on ne marche pas dans le même sens.

Pour exprimer que notre promeneur fait + 50 pas pour parcourir le segment $\overline{AB}$ nous écrirons :

$$\overline{AB} = +50 \qquad \text{ou } \overline{AB} = 50.$$

On écrirait, au contraire :

$$\overline{BA} = -50$$

puisqu'il faut faire — 50 pas pour parcourir le segment $\overline{BA}$, c'est-à-dire faire 50 pas à reculons pour aller de B vers A.

Les nombres + 50 et — 50 s'appellent les *équivalents algébriques* des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$, l'unité choisie étant le pas du promeneur. Bien entendu, on pourrait choisir toute autre unité; *la seule chose essentielle, c'est de bien préciser quelle unité on choisit et de ne pas en changer dans le cours d'une même question.*

L'équivalent algébrique d'un segment ne dépend pas seulement de l'unité de longueur choisie, il dépend aussi du sens choisi comme positif sur l'axe ; si, la figure restant par ailleurs la même, on changeait la direction de la flèche, c'est $\overline{AB}$ qui aurait pour équivalent — 50 et $\overline{BA}$ qui

aurait $+ 50$. Il en est de la direction positive comme de l'unité de longueur; on peut la choisir arbitrairement au début d'une question, *mais il est essentiel qu'elle soit bien précisée et qu'elle ne change pas dans le courant de la question* La longueur 50 est dite la *valeur absolue* des nombres $+ 50$ et $- 50$; c'est la longueur commune des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$; ou, si l'on veut, la distance géométrique AB ou BA. D'une manière générale, *on appelle valeur absolue d'un nombre positif ou négatif le nombre que l'on obtient en supprimant le signe.* La valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre.

On donne quelquefois aux nombres positifs et négatifs le nom de nombres *relatifs*, en opposition aux nombres *absolus*, qui désignent des grandeurs non susceptibles de signes A ce point de vue il peut y avoir parfois avantage à distinguer trois espèces de nombres : les nombres absolus, les nombres positifs et les nombres négatifs. Mais cette distinction purement théorique n'a aucun intérêt pratique. Pratiquement, on confond toujours les nombres absolus et les nombres positifs : 3 est la même chose que $+ 3$.

6. **Addition. Somme de deux nombres.** — L'addition des nombres positifs et négatifs doit être définie de manière à donner la solution des mêmes problèmes *pratiques* que l'addition des nombres positifs (ou absolus).

Lorsque l'on utilise les nombres positifs ou négatifs pour mesurer des grandeurs d'une espèce déterminée, il est nécessaire de donner une définition *concrète* de l'addition pour ces grandeurs et de

vérifier que les règles de l'addition que nous allons donner concordent avec cette définition concrète.

Il en sera toujours ainsi dans les cas que nous étudierons; si, pour certaines grandeurs, il n'en était pas ainsi, cela prouverait que l'on n'a pas le droit d'utiliser, pour les mesurer, les nombres positifs et négatifs[1]. Pour ajouter deux nombres, on utilisera la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir la somme de deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et l'on affecte la somme du signe commun; pour obtenir la somme de deux nombres de signes contraires, on retranche la plus petite valeur absolue de la plus grande et on affecte la différence du signe de la plus grande.*

Exemples. — On a, d'après cette règle :

$$3 + (-4) = -1$$
$$125 + (-210) = -85$$
$$-3\,250 + (-3) = -3\,253$$
$$-1\,000 + 2 = -998$$
$$-1\,010 + 2000 = 990$$
$$134 + (-134) = 0.$$

Les nombres tels que 134 et -134 dont la

1. Il est clair, en effet, que les mots n'ont aucun pouvoir mystérieux par eux-mêmes et ne sauraient créer la réalité; il ne suffit pas d'appeler certaines grandeurs *positives* et certaines autres grandeurs *négatives* pour qu'elles se combinent entre elles suivant les lois que nous allons donner; c'est *parce qu'elles se combinent d'après ces lois* qu'on a le droit de les appeler positives et négatives Toutes les fois que l'on sera en présence de *choses nouvelles*, rien ne pourra remplacer leur étude *directe* préalable; c'est seulement *après* cette étude que l'on peut, s'il y a lieu, utiliser pour aller plus loin l'instrument particulièrement commode qu'est l'Algèbre.

somme est égale à zéro sont dits *nombres opposés;* on dit aussi qu'*ils sont égaux en valeur absolue et de signes contraires* (et parfois, *incorrectement*, qu'ils sont égaux et de signes contraires).

7 **Somme de plusieurs nombres.** — La somme de plusieurs nombres est, par définition, le résultat final que l'on obtient, lorsque l'on ajoute le second au premier, le troisième à la somme obtenue, le quatrième à la nouvelle somme, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les nombres donnés.

La règle de l'addition de plusieurs nombres doit donc être une conséquence de la règle de l'addition de deux nombres; nous démontrerons à cet égard le théorème suivant :

Théorème. — *Pour calculer la somme de plusieurs nombres, on peut procéder comme il suit : additionner les nombres positifs; additionner les valeurs absolues des nombres négatifs; retrancher la plus petite de ces sommes de la plus grande, et donner au résultat le signe des nombres qui ont fourni la plus grande.*

Pour démontrer ce théorème, nous observerons qu'il se réduit à la règle donnée plus haut lorsqu'il n'y a que deux nombres; il nous suffit donc de faire voir que, s'il est vrai dans le cas de n nombres, il est vrai dans le cas de $n + 1$.

Supposons donc que nous ayons n nombres, que la somme des nombres positifs soit 45, que la somme des valeurs absolues des nombres négatifs soit 30 et que nous voulions ajouter à ces n nombres le $n + 1^{\text{ième}}$ nombre -50. D'après la définition de la somme de $n + 1$ nombres, nous devons ajouter -50 à la somme des n premiers nombres, c'est-à-dire à $+15$, différence de 45 et de 30 affectée du

signe +, puisque 45 est la somme des nombres *positifs*. D'après la règle de l'addition de deux nombres, on a :

$$15 + (-50) = -35.$$

Il faut prouver que l'on arrivera au même résultat en appliquant à la somme des $n+1$ nombres donnés, la règle qui résulte du théorème ; la somme des nombres positifs est 45 ; la somme des valeurs absolues des nombres négatifs est $30 + 50 = 80$; nous devons retrancher 45 de 80 et donner à la différence le signe — ; nous trouvons bien — 35 ; c'est une vérification.

On aura une démonstration en utilisant un théorème d'arithmétique sur la possibilité d'effectuer les opérations dans un ordre quelconque, pourvu qu'elles soient possibles, dans une suite d'additions et de soustractions (voir Arithmétique, premier cycle, p. 19). On a, en effet :

$$\begin{aligned} 50 - (45 - 30) &= 50 - 15 \\ &= 50 - 45 + 30 \\ &= 50 + 30 - 45 = 80 - 45. \end{aligned}$$

On doit donc obtenir le même résultat par les deux procédés : celui qui résulte de la définition et celui qui résulte du théorème.

Dans le cas que nous venons d'examiner, la somme des n premiers nombres était positive, le $n+1^{\text{ième}}$ négatif et la somme des $n+1$ nombres négative ; *on examinerait de la même manière les autres cas qui peuvent se présenter ;* de là résulterait la démonstration complète du théorème.

De ce théorème on déduit immédiatement les corollaires suivants.

Corollaire I. — *La somme de plusieurs nombres ne change pas quand on intervertit leur ordre.*

Corollaire II. — *On ne change pas la valeur d'une somme en remplaçant plusieurs de ses parties par leur somme effectuée.*

8 **Applications de l'addition.** — Pour pouvoir appliquer à des exemples concrets les règles de l'addition, il suffit de démontrer que la règle de l'addition de *deux* nombres fournit un résultat concordant avec la définition concrète, puisque la règle de l'addition de plusieurs nombres en est une conséquence [1].

Nous n'entrerons pas dans le détail de cette vérification; c'est la résolution de problèmes concrets par deux méthodes : la méthode directe, qui résulte de la considération immédiate des objets, et la méthode algébrique, qui fournira aux élèves la meilleure vérification et leur donnera la confiance nécessaire dans les règles de l'Algèbre.

Rappelons simplement une formule fondamentale. A, B, C étant trois points quelconques d'un axe, on a toujours :

$$(1) \qquad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Cette formule peut être regardée comme la *définition* de la somme des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, placés

---

1. Nous avons suivi dans l'Algèbre (premier cycle) et les *Notions d'Algèbre* (dans l'Arithmétique, 3ième A) une marche inverse, plus élémentaire, en donnant une démonstration concrète, dans chaque cas particulier, des règles de l'addition de deux ou *plusieurs* nombres.

de telle manière que l'origine du second coïncide avec l'extrémité du premier; mais il est nécessaire alors de vérifier que cette définition concrète conduit bien à un résultat conforme à la règle donnée plus haut.

La formule (1) a lieu aussi si l'on désigne par A, B, C trois époques quelconques et par $\overline{AB}$ l'intervalle de temps qui sépare A de B, cet intervalle étant regardé comme positif ou négatif suivant que B est postérieur ou antérieur à A.

9. **Soustraction.** — La soustraction est l'opération inverse de l'addition. *Retrancher un nombre d'un autre c'est en trouver un troisième qui, ajouté au premier, reproduit le second.*

Règle. — *Pour retrancher un nombre quelconque, il suffit d'ajouter le nombre opposé.*

Cette règle est une conséquence des corollaires de la page 16 et de la définition de la soustraction; nous voulons prouver que l'on a par exemple :

$$8 - (-15) = 8 + 15,$$

il suffit de montrer d'après la définition de la soustraction que l'on a :

$$8 + 15 + (-15) = 8.$$

Or cela est une conséquence du corollaire cité, car l'on a :

$$15 + (-15) = 0$$

et l'égalité à démontrer se réduit par suite à :

$$8 + 0 = 8.$$

La soustraction se ramène donc à l'addition; soit,

par exemple, à effectuer le calcul de l'expression :

$$4-(-5)+(-7)-(+4)-(-3)+12.$$

On pourra l'écrire :

$$4+5+(-7)+(-4)+3+12,$$

de manière qu'il n'y ait plus que des additions à effectuer, et l'on appliquera les règles que nous avons données pour l'addition. Les théorèmes démontrés pour le cas d'additions successives s'appliquent aussi dans le cas de soustraction; en particulier, *on ne change pas le résultat final en intervertissant l'ordre des opérations;* on a, par exemple :

$$4-(-3)+(-5)-(-7)=4-(-7)-(-3)+(-5).$$

Remarque. — Lorsque l'on désigne les nombres par des lettres, il peut arriver qu'une lettre, telle que a, désigne un nombre négatif, tel que -3; alors le symbole $-a$ signifiera que l'on doit retrancher -3, c'est-à-dire que l'on doit ajouter 3; il équivaut donc à $+3$. *D'une manière générale, $-a$ désigne toujours le nombre opposé au nombre a* On se trouve amené ainsi parfois à superposer, en quelque sorte, plusieurs signes —; il résulte des explications que nous avons données que *deux* signes — peuvent être supprimés (ou remplacés par un signe +, ce qui revient au même). Ainsi lorsque a désigne -3, $-a$ désigne $-(-3)$, c'est-à-dire $+3$; si l'on doit retrancher $-a$, cela revient à ajouter a, c'est-à-dire à retrancher 3. Dans ce dernier cas, nous avions *trois* signes —; si l'on en supprime *deux*, il en subsiste *un*.

EXEMPLE I. — *Calculer l'expression :*

$$a - b - (-c) + (-d),$$

où l'on suppose :

$$a = 10 \qquad b = -4 \qquad c = 3 \qquad d = -7.$$

On obtient :

$$10 + 4 + 3 + 7 = 24.$$

II. — *Calculer l'expression :*

$$-a - (-b) + (-c) - (-d),$$

où l'on suppose .

$$a = 4 \qquad b = -6 \qquad c = -3 \qquad d = 7.$$

On obtient :

$$-4 - 6 + 3 + 7 = 0.$$

10. **Théorèmes sur la soustraction**. THÉORÈME I. — *Pour retrancher une somme d'un nombre, il suffit d'en retrancher successivement les diverses parties de la somme.*

On a, par exemple :

$$4 - [5 + (-3) + (-7) + 2] = 4 - 5 - (-3) - (-7) - 2$$
$$= 4 - 5 + 3 + 7 - 2.$$

Ce théorème résulte immédiatement de la définition même de la soustraction; car, en ajoutant au second membre la somme qui figure entre crochets au premier membre, on obtient bien 4; il suffit, pour faire cette addition, d'utiliser les corollaires de la page 16; les termes $+5$, -5; -3, $+3$, etc., se détruisent deux à deux

Lemme. — *Lorsqu'un nombre est égal à la somme de plusieurs autres, le nombre opposé est égal à la somme des nombres opposés.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème de la page 14; on peut aussi le déduire du théorème précédent en observant que le nombre opposé à un nombre donné s'obtient en retranchant ce nombre de zéro.

Théorème II. — *Pour retrancher d'un nombre la différence de deux autres il suffit d'en retrancher le premier et d'ajouter le second au résultat obtenu.*

On a, par exemple :

$$-5-[6-(-3)]=-5-6+(-3).$$

Car le nombre opposé à $6-(-3)$, c'est-à-dire à $6+3$ est $-6+(-3)$.

On conclut des théorèmes précédents que toute parenthèse précédée du signe $+$ peut être supprimée, tandis que, si l'on supprime une parenthèse précédée du signe —, il faut changer les signes qui précèdent les nombres placés à son intérieur.

Dans l'application de la règle pratique qui précède, on doit avoir grand soin d'observer que dans le cas où plusieurs signes se trouvent superposés devant un même nombre, *il ne faut changer que l'un d'eux.*

Soit, par exemple, à calculer l'expression suivante :

$$5-[2-(-3)].$$

On obtiendra :

on a eu soin de changer l'un des signes — qui précédaient 3, mais on n'a pas changé les deux. Pratiquement, d'ailleurs, on évitera le plus possible ces superpositions de signes, en effectuant immédiatement les opérations indiquées.

11. **Multiplication**. DÉFINITION. — *On appelle produit de deux nombres positifs ou négatifs, un nombre dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des facteurs et qui, de plus, est positif dans le cas où ces facteurs sont de même signe, négatif dans le cas où ces facteurs sont de signes contraires*

D'après la définition, l'on a :

$$\begin{aligned} 3 \times 5 &= 15 \\ 3 \times (-5) &= -15 \\ -3 \times 5 &= -15 \\ -3 \times (-5) &= 15. \end{aligned}$$

Produit de plusieurs facteurs. — Le produit de plusieurs facteurs est, par définition, le résultat final que l'on obtient lorsque l'on multiplie le premier par le second, le produit obtenu par le troisième, le produit obtenu par le quatrième, etc.

Ainsi soit le produit :

$$-2 \times 4 \times (-5) \times 6 \times (-3) \times 2.$$

L'on a, d'après la définition :

$$-2 \times 4 = -8; \quad -8 \times (-5) = 40; \quad 40 \times 6 = 240;$$
$$240 \times (-3) = -720; \quad -720 \times 2 = -1440;$$

le produit considéré a donc pour valeur — 1440.

Signe du produit de plusieurs facteurs. —

Lorsqu'on effectue le produit de plusieurs facteurs d'après la règle précédente, on voit que chaque facteur négatif entraîne un changement de signe, tandis que chaque facteur positif n'en entraîne pas. On en conclut que *le signe du produit ne dépend que du nombre des facteurs négatifs;* si ce nombre est pair ou nul, le produit est positif; si ce nombre est impair, le produit est négatif.

Théorème. — *La valeur d'un produit de plusieurs facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.* Pour démontrer que la valeur du produit ne change pas, il suffit de faire voir que *la valeur absolue* reste la même et que le signe reste aussi le même. Or, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; d'après un théorème d'arithmétique, elle ne dépend pas de leur ordre. Quant au signe, il ne dépend que du nombre des facteurs négatifs; le théorème est donc démontré.

12. **Propriété distributive de la multiplication.** Théorème. — *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier les parties de la somme par ce nombre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Soit, en effet, à multiplier par — 10 la somme :

$$5 + (-3) + (-8) + 2 + (-15).$$

Nous savons (p. 14) que, pour calculer cette somme, il suffit de faire la somme des nombres positifs, ce qui donne ici $5 + 2 = 7$, de faire la somme des valeurs absolues des nombres négatifs, ce qui donne ici $3 + 8 + 15 = 26$, de retrancher la plus petite de ces sommes de la plus grande, ce

qui donne $26 - 7 = 19$ et de donner au résultat le signe de la plus grande; la somme est donc -19, dont le produit par -10 est 190. Nous voulons démontrer que l'on arrivera au même résultat en suivant la marche qu'indique l'énoncé du théorème.

Dans ce but écrivons la somme obtenue en multipliant par -10 les diverses parties de la somme donnée; c'est :

$$-50 + 30 + 80 + (-20) + 150.$$

Comme le multiplicateur est négatif, les signes de tous les termes ont été changés.

Pour calculer cette seconde somme, nous devons faire la somme des nombres positifs; or ces nombres positifs sont précisément égaux aux produits par 10 des valeurs absolues des nombres négatifs dans la somme primitive; on a :

$$30 + 80 + 150 = 3 \times 10 + 8 \times 10 + 15 \times 10$$
$$= (3 + 8 + 15) \times 10 = 26 \times 10 = 260.$$

Nous utilisons le théorème d'arithmétique dont l'énoncé est le même que celui du théorème à démontrer (mais où l'on suppose que tous les nombres sont positifs).

De même, l'on a :

$$50 + 20 = (5 + 2)\ 10 = 7 \times 10 = 70.$$

Il se trouvait que la somme 26 des valeurs absolues des nombres négatifs était supérieure à la somme 7 des nombres positifs; le produit 260 de 26 par 10 est par suite supérieur au produit 70 de

7 par 10; nous devons donc retrancher 70 de 260; on a :

$$260 - 70 = 26 \times 10 - 7 \times 10 = (26 - 7)\ 10 = 19 \times 10.$$

Nous utilisons ici le théorème d'arithmétique sur la multiplication d'une différence par un nombre.

Le théorème énoncé est donc démontré dans le cas où la somme proposée est négative, ainsi que le multiplicateur; on étudierait de même les autres cas qui peuvent se présenter et dans lesquels la démonstration est encore plus simple. Le théorème est donc général.

On exprime la propriété qui résulte de son énoncé en disant que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

La soustraction se ramenant à l'addition, la multiplication est aussi distributive par rapport à la soustraction; en désignant par a, b, c, d, m, des nombres positifs ou négatifs, on a :

$$(a - b - c + d)\ m = am - bm - cm + dm.$$

La règle de la multiplication, comme celles de l'addition et de la soustraction, doit être justifiée par des exemples concrets; il est nécessaire de faire voir que cette règle permet d'obtenir la solution exacte des problèmes dans lesquels on l'utilise. C'est ce que montre l'étude du mouvement uniforme.

13. **Division.** — La division est l'opération inverse de la multiplication. Diviser un nombre par un autre, c'est en trouver un troisième dont le produit par le second soit égal au premier.

Par exemple :

$$12 : (-4) = -3 \quad \text{car} \quad (-3) \times (-4) = 12.$$

La règle de la division est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

RÈGLE. — *Le quotient de deux nombres a pour valeur absolue le quotient de leurs valeurs absolues et, de plus, est positif ou négatif suivant que ces deux nombres sont de même signe ou de signes contraires.*

EXEMPLES :

$$(-12) : (-4) = 3$$
$$(-30) : 6 = -5$$
$$30 : (-6) = -5.$$

14. **Fractions algébriques.** — On appelle quelquefois fraction algébrique[1] le quotient indiqué de deux nombres positifs ou négatifs.

Par exemple, voici des fractions algébriques :

$$\frac{-3}{4}, \quad \frac{-6}{-5}, \quad \frac{7,2}{-4}.$$

Les valeurs de ces fractions sont, d'après la règle de la division :

$$-\frac{3}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad -\frac{7,2}{4}.$$

THÉORÈME. — *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre.*

En effet, on ne change pas la valeur absolue,

1. Nous adoptons cette expression parce qu'elle figure au programme.

d'après la proposition analogue de l'arithmétique, quant au signe, il ne change pas si l'on multiplie ou divise par un nombre positif, car les signes des deux termes restent les mêmes ; et il ne change pas non plus, si l'on multiplie ou divise par un nombre négatif, car les signes des deux termes changeant alors tous deux, le signe de leur quotient reste le même.

De la proposition précédente on conclut qu'il est possible de réduire plusieurs fractions au même dénominateur par la même règle qu'en arithmétique. Il en résulte que, pour étudier l'addition ou la soustraction des fractions, on peut se borner aux fractions qui ont même dénominateur.

Règle. — *Pour ajouter ou retrancher plusieurs fractions ayant un même dénominateur, il suffit d'ajouter ou retrancher les numérateurs et de donner au résultat le dénominateur commun.*

Ainsi, a, b, c, d, m, étant des nombres positifs ou négatifs, on a :

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m} = \frac{a - b - c + d}{m}.$$

Démonstration de la règle. — Pour démontrer cette règle, il nous suffit de multiplier par m les deux membres de l'égalité précédente. S'ils sont égaux, ils resteront égaux ; s'ils sont inégaux, ils resteront inégaux ; c'est une conséquence de la règle de la multiplication. Nous avons donc à démontrer l'égalité

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m}\right) m = \left(\frac{a - b - c + d}{m}\right) m.$$

Il suffit d'appliquer la règle relative à la multipli-

cation d'une somme ou différence par un nombre m; on obtient :

$$a - b - c + d = a - b - c + d$$

ce qui est exact.

15. **Multiplication des fractions.** Règle. — *Le produit de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

Exemples :

$$\frac{3}{-4} \times \frac{5}{-6} = \frac{15}{24},$$

$$\frac{3}{-4} \times \frac{-5}{6} = \frac{-15}{-24},$$

$$\frac{3}{-4} \times \frac{-5}{-6} = \frac{-15}{24}.$$

Démonstration de la règle. — D'après la définition de la multiplication, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; il en est bien ainsi lorsqu'on suit la règle indiquée. Il suffit donc de montrer que le signe obtenu est le bon; c'est ce que l'on vérifie en examinant successivement tous les cas possibles; par exemple, dans le premier exemple donné, les deux facteurs sont négatifs et le produit est positif, ce qui doit être, etc.

16. **Division des fractions.** Règle. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Exemples :

$$\frac{3}{4} : \frac{-5}{-6} = \frac{3}{4} \times \frac{-6}{-5} = \frac{-18}{-20},$$

$$\frac{3}{-4} : \frac{5}{-6} = \frac{3}{-4} \times \frac{-6}{5} = \frac{-18}{20},$$

$$\frac{-3}{-4} : \frac{5}{-6} = \frac{-3}{-4} \times \frac{-6}{5} = \frac{18}{-20}.$$

Justification de la règle. — La règle se justifie comme celle de la multiplication.

III. APPLICATIONS DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS. MOUVEMENT UNIFORME

17. **Détermination d'un point sur un axe.** — Nous avons déjà dit que l'on appelle *axe* une droite sur laquelle on a fixé un sens positif, le sens opposé étant dès lors appelé sens négatif. Etant donné un axe, si l'on connaît la position d'un point A sur cet axe, pour connaître la position d'un autre point B, il suffit de connaître la valeur du segment $\overline{AB}$ (et l'unité de longueur). Il est commode, pour fixer la position d'un point sur un axe, de donner sa distance à un point fixe, toujours le même, qu'on appelle *origine des abscisses* et que l'on désigne généralement par la lettre O; par définition, la distance du point A au point O est la valeur algébrique du segment $\overline{OA}$; on dit que c'est l'abscisse du point A.

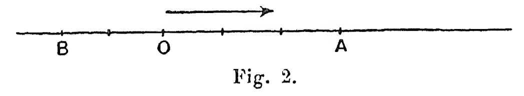


Fig. 2.

Ainsi, sur la figure 2, l'abscisse du point A est 3; l'abscisse du point B est — 2, comme on le voit de suite, grâce aux traits équidistants qui y sont figurés. En résumé :

Définition. — *Étant donnés un axe, un point fixe O sur cet axe, et une unité de longueur, l'abscisse d'un point A de l'axe est la valeur algébrique du segment* $\overline{OA}$.

18. **Variations de l'abscisse.** — Lorsque le point A se déplace sur l'axe, son abscisse varie; à chaque position du point correspond une valeur et une seule de l'abscisse, et réciproquement à tout nombre positif ou négatif correspond un point et un seul dont l'abscisse est égale à ce nombre.

Étudions les variations de l'abscisse lorsque le point A partant d'un point très éloigné dans la

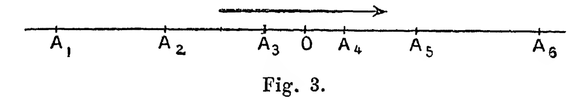


Fig. 3.

direction négative, se déplace constamment dans le sens positif, occupant successivement les positions A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (fig. 3). L'abscisse du point A_1 est égale au segment $\overline{OA_1}$; c'est un nombre négatif dont la valeur absolue est la longueur OA_1; cette valeur absolue est d'autant plus grande que A_1 est plus éloigné du point O. Lorsque le point vient en A_2, puis en A_3, l'abscisse reste négative, mais sa valeur absolue devient de plus en plus petite; elle devient nulle lorsque le point A se confond avec le point O. Si le point A continue à se déplacer dans le même sens, l'abscisse devient positive, d'abord très petite, puis de plus en plus grande (positions A_4, A_5, A_6).

On convient de dire qu'un nombre a est supérieur à un nombre b, ou plus grand que b, lorsque la différence $a - b$ est positive; et l'on exprime ce fait en

écrivant .

$$a > b$$

ou

$$a - b > 0.$$

Par exemple on a :

$$7 > 4,$$

car $7 - 4 = 3$ est un nombre positif. On a, de même :

$$7 > -4,$$

car $7 - (-4) = 11$ est un nombre positif. On a enfin :

$$-4 > -7,$$

car $-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$ est un nombre positif.

La définition que nous avons donnée coïncide donc avec la définition arithmétique lorsque a et b sont tous deux positifs; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on en déduit la règle suivante.

Règle. — *Lorsque a est positif et b négatif, on a toujours :*

$$a > b,$$

lorsque a et b sont tous deux négatifs, on a :

$$a > b,$$

dans le cas et dans le cas seulement où la valeur absolue de a est inférieure à la valeur absolue de b.

La représentation d'un nombre par le point dont l'abscisse est égale à ce nombre fournit une image simple qui explique et légitime ces définitions. Désignons par A le point dont l'abscisse est a et par B le point dont l'abscisse est b; on vérifie sans

peine (fig. 4) que si l'on a l'inégalité

$$a > b,$$

il en résulte que A est, sur notre figure, à droite de B, c'est-à-dire est, par rapport à B, dans la direction positive (puisque nous avons choisi comme sens positif le sens de gauche à droite). Nous avons fait la figure dans les trois cas différents qui peuvent se présenter : a et b positifs ; a positif et b négatif ; a et b négatifs.

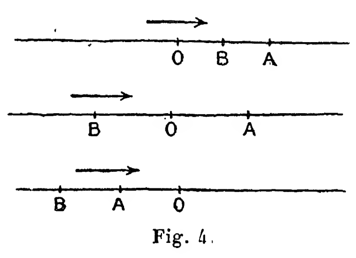


Fig. 4.

En tenant compte de cette définition on peut résumer comme il suit ce que nous avons dit sur la variation de l'abscisse.

Règle. — *Lorsque le point* A *se déplace dans le sens positif, son abscisse va constamment en croissant, c'est-à-dire prend des valeurs de plus en plus grandes.*

Sur la figure 3, on a, par exemple :

$$\overline{OA_6} > \overline{OA_5} > \overline{OA_4} > \overline{OA_3} > \overline{OA_2} > \overline{OA_1}.$$

Remarque. — Le nombre *zéro* est supérieur à tous les nombres négatifs ; géométriquement, le point origine O est à droite de tous les points d'abscisse négative (lorsque le sens positif est le sens de gauche à droite).

19. **Distance de deux points.** — Problème : *Étant données les abscisses de deux points, calculer leur distance.*

Soient A et B les deux points donnés; désignons par a et b leurs abscisses, c'est-à-dire posons :

$$\overline{OA} = a; \qquad \overline{OB} = b.$$

Nous voulons calculer le segment $\overline{AB}$; nous savons que l'on a :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}.$$

On a d'ailleurs :

$$\overline{AO} = -\overline{OA} = -a$$
$$\overline{OB} = b.$$

Il en résulte donc :

$$\overline{AB} = -a + b = b - a.$$

Telle est la formule qui donne la distance de deux points; on peut la traduire en langage ordinaire comme il suit :

Règle. — *La distance de deux points* A *et* B *situés sur un axe est égale à l'abscisse du second* B *diminuée de l'abscisse du premier* A.

Il ne faut pas perdre de vue que la distance $\overline{AB}$ ainsi définie est positive ou négative suivant que la direction de A vers B est elle-même positive ou négative.

Bien que cette règle, ayant été démontrée, n'ait pas besoin de vérification, nous allons, vu sa très grande importance, donner de nombreux exemples.

Exemple I.

B O A

Fig. 5.

$$\overline{OA} = a = 3; \qquad \overline{OB} = b = -2.$$
$$\overline{AB} = -2 - 3 = -5.$$

EXEMPLE II.

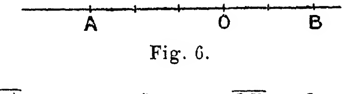


Fig. 6.

$$\overline{OA} = a = -3; \qquad \overline{OB} = b = 2.$$
$$\overline{AB} = 2 - (-3) = 5.$$

EXEMPLE III.

Fig. 7.

$$\overline{OA} = a = -6; \qquad \overline{OB} = b = -4.$$
$$\overline{AB} = -4 - (-6) = 2.$$

EXEMPLE IV.

Fig. 8.

$$\overline{AO} = a = -1; \qquad \overline{OB} = b = -3.$$
$$\overline{AB} = -3 - (-1) = -2.$$

20. **Détermination d'un événement dans le temps.** — Pour déterminer la position d'un événement dans le temps, on choisit une époque bien déterminée, que l'on appelle *origine des temps*, et une *unité de temps*. La date de chaque événement est alors représentée par un nombre positif si l'événement est postérieur à l'origine des temps, négatif s'il est antérieur [1], et dont la valeur absolue

1. Il est clair que l'on pourrait théoriquement faire une convention de signe opposée ; celle que nous indiquons est généralement adoptée.

est égale à la mesure de l'intervalle de temps qui sépare cet événement de l'origine

21. **Intervalle qui sépare deux événements.** — Lorsque l'on connaît les époques de deux événements A et B, l'intervalle de temps qui les sépare est égal à l'époque de B, diminuée de l'époque de A. L'intervalle ainsi obtenu est positif si A est antérieur à B, et négatif si A est postérieur à B; on peut le désigner par $\widehat{AB}$.

22. **Changement de l'origine des abscisses.** — Il arrive fréquemment qu'il est nécessaire de changer l'origine des abscisses, c'est-à-dire, connaissant les abscisses de divers points d'un axe, l'origine étant O, de calculer les abscisses de ces mêmes points, l'origine étant un autre point O′ de l'axe.

Il est évidemment nécessaire pour cela de connaître la position de O′ par rapport à O, on doit donc supposer connue la mesure du segment $\overline{OO'}$, c'est-à-dire *l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne*.

Il suffit alors (fig. 9) d'appliquer la formule :

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A},$$

O O′ A

Fig. 9.

On en déduit :

$$\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OO'},$$

c'est-à-dire que l'on a la règle suivante :

RÈGLE. — *L'abscisse d'un point A, par rapport à la nouvelle origine, est égale à l'abscisse de A par rapport à l'ancienne origine, diminuée de l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.*

Si l'on désigne par a l'abscisse de A par rapport à O, par a' l'abscisse de A par rapport à O' et par d l'abscisse de O' par rapport à O, on a la formule fondamentale :

$$a' = a - d,$$

qu'il faut aussi connaître sous la forme équivalente :

$$a = a' + d.$$

23. **Changement de l'origine des temps.** — Il est aussi très important de savoir changer l'origine des temps ; la règle est évidemment la même ; nous nous contenterons de l'énoncer.

RÈGLE. — *L'époque d'un événement par rapport à la nouvelle origine est égale à son époque par rapport à l'ancienne, diminuée de l'époque de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.*

24. **Définition du mouvement uniforme.** — Considérons un point A qui se déplace sur un axe ; on dit que le mouvement du point A est uniforme lorsque les espaces qu'il parcourt dans des temps égaux sont toujours égaux, quels que soient ces temps égaux. Ainsi l'espace parcouru pendant une heure est toujours le même, l'espace parcouru pendant une minute est toujours le même, l'espace parcouru pendant une seconde est toujours le même.

Dans cette définition, il ne faut pas perdre de vue que le point A se déplace sur *un axe*, c'est-à-dire que des espaces ne sont considérés comme

égaux que s'ils sont *égaux en valeur absolue et de même signe.*

Un promeneur qui marche d'un pas égal sur une route se déplace à peu près d'un mouvement uniforme, *s'il se dirige toujours dans le même sens;* il n'en est pas de même s'il se promène de long en large dans un corridor.

On appelle *vitesse* d'un mouvement uniforme l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

Pour déterminer la vitesse il est donc nécessaire de connaître : 1° le mouvement; 2° le sens choisi comme sens positif, 3° l'unité de longueur; 4° l'unité de temps.

Il résulte de la définition de la vitesse que c'est un nombre positif ou négatif suivant que le mobile se déplace dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Lorsque l'on donne la vitesse d'un mobile, on fait souvent connaître les unités de longueur et de temps : on dit par exemple que la vitesse d'un automobile est de 30km à l'heure On pourrait dire aussi : la vitesse est 30, les unités choisies étant le kilomètre et l'heure; il reviendrait au même de dire : la vitesse est 500, les unités choisies étant le mètre et la minute; ou la vitesse est $833\frac{1}{3}$, les unités étant le centimètre et la seconde; car parcourir 30km en une heure revient à parcourir 500 mètres en une minute, et à parcourir 833 centimètres $\frac{1}{3}$ en une seconde.

Nous n'insisterons pas sur la théorie de ces *changements d'unité;* il est bon de se familiariser d'abord

avec leur pratique usuelle. Contentons-nous de savoir que les unités de temps et de longueur doivent toujours avoir été fixées d'une manière précise et bien connue.

25. **Équation du mouvement uniforme.** — Proposons-nous de déterminer quel est l'espace e parcouru pendant un temps t, la vitesse étant v. Si t est un nombre entier, par exemple 12, on pourra raisonner comme il suit : pendant le temps 1, l'espace parcouru est, par définition, égal à v; l'espace parcouru pendant le temps 12 est égal à l'espace parcouru pendant 12 intervalles de temps égaux à 1 ; on a donc :

$$e = 12\,v,$$

ou, plus généralement :

$$e = vt.$$

L'espace est égal au produit de la vitesse par le temps. Telle est la formule du mouvement uniforme, qu'on appelle aussi *l'équation du mouvement uniforme*.

Nous avons démontré cette équation en supposant que t soit un nombre entier; si t est une fraction, telle que $\frac{13}{7}$, on remarquera que les espaces parcourus pendant des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{7}$ sont égaux, d'après la définition du mouvement uniforme; dans 7 de ces intervalles de temps, c'est-à-dire pendant l'unité de temps, l'espace est égal à v d'après la définition de la vitesse; l'espace est donc égal à $\frac{v}{7}$ dans chacun de ces intervalles et à

13 fois $\frac{v}{7}$ pendant 13 de ces intervalles, égaux chacun à $\frac{1}{7}$. L'espace parcouru pendant le temps $t=\frac{13}{7}$ est donc $\frac{13v}{7}$, ce qui est d'accord avec la formule :

$$e=vt.$$

Dans cette démonstration, nous avons supposé t positif, il en résulte que e a le même signe que v, ce qui est d'accord avec la remarque que nous avons faite sur le signe de la vitesse. Si la vitesse est positive, l'espace est positif, le mobile s'est déplacé dans le sens positif, a parcouru un segment positif; c'est le contraire si la vitesse est négative.

Supposons maintenant que t soit négatif. Que doit-on entendre par l'*espace parcouru en un temps négatif?* A l'époque actuelle le mobile est en A; à l'époque -3, c'est-à-dire il y a 3 secondes, si la seconde est l'unité de temps, il était en B; *nous disons que le segment* $\overline{AB}$ *est l'espace qui correspond au temps* -3; c'est le segment qu'il faut parcourir, pour, de là position actuelle, aller à la position occupée à l'époque -3; de même que l'espace parcouru pendant le temps $+3$ est le segment qu'il faut parcourir pour, de la position actuelle, aller à la position occupée à l'époque $+3$.

Quelle est la valeur algébrique du segment $\overline{AB}$? Elle est opposée à celle du segment $\overline{BA}$; or ce segment $\overline{BA}$, parcouru pendant le temps 3, est égal à $3v$; on a donc :

$$\overline{AB}=-3v,$$

c'est-à-dire, dans ce cas encore :

$$e = vt.$$

On peut remarquer que, t étant négatif, si la vitesse est positive, $\overline{AB}$ est un segment négatif, puisque le sens du mouvement est le sens de B vers A ; si, au contraire, la vitesse est négative, $\overline{AB}$ est un segment positif.

On se rend ainsi compte des raisons concrètes des règles de la multiplication des nombres positifs et négatifs; la généralité de l'équation du mouvement uniforme justifie ces règles, et, à défaut d'autres raisons, l'étude des problèmes sur le mouvement uniforme aurait suffi pour conduire à les imaginer.

26. **Forme plus générale de l'équation du mouvement uniforme.** — Dans les problèmes que l'on se pose au sujet du mouvement uniforme d'un ou de plusieurs mobiles sur un axe, on a souvent à résoudre la question suivante : *connaissant l'abscisse du mobile à une certaine époque, calculer cette abscisse à une autre époque.*

Solution. — Désignons par t_0 l'époque à laquelle on connaît l'abscisse du mobile, soit x_0 cette abscisse;

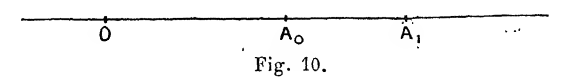


Fig. 10.

le mobile est en A_0; on se propose de déterminer l'abscisse x_1 du point A_1 où se trouve le mobile à l'époque t_1.

Or, on a, d'une part :

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_0} + \overline{A_0A_1}$$

et d'autre part :

$$\overline{A_0A_1} = v(t_1 - t_0),$$

car A_0A_1 est l'espace parcouru pendant le temps $t_1 - t_0$ (temps positif si t_1 désigne une époque postérieure à t_0 et négatif dans le cas contraire).

On a donc, puisque $\overline{OA_1} = x_1$; $\overline{OA_0} = x_0$:

$$x_1 = x_0 + v(t_1 - t_0).$$

Telle est la forme plus générale que l'on peut donner à l'équation du mouvement uniforme. Dans cette formule x_0 désigne l'abscisse qui correspond à l'époque t_0 et x_1 l'abscisse qui correspond à l'époque t_1, ces époques sont tout à fait quelconques.

Après avoir étudié les équations du premier degré, on se rendra compte combien l'équation du mouvement uniforme est un instrument commode pour résoudre de nombreux problèmes.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

1. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = \left[a(b-c) + d\right]\left[\frac{a+b}{c-d} - (b-3)(a^2-5)\right],$$

où l'on suppose .

$$a = -1$$
$$b = 2$$
$$c = 3$$
$$d = 4.$$

2. — Même question, en supposant :

$$a = -\frac{2}{3}, \qquad b = \frac{3}{4}, \qquad c = 0{,}35, \qquad d = -0{,}1.$$

3. — Calculer la valeur de y donnée par la formule :

$$y = \Big\{[(a+b)c+1](a-b)+2\Big\}\Big\{[(a+b)c+1]d-3\Big\},$$

en supposant :

$$a = 2$$
$$b = -1$$
$$c = 1$$
$$d = -2.$$

4. — Même question, en supposant :

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -0,1, \qquad c = \frac{3}{-2}, \qquad d = 1.$$

5. — Le volume d'un certain solide est donné par la formule :

$$V = \frac{3abcd}{a+b+c+d},$$

a, b, c, d étant quatre longueurs exprimées en *mètres;* V est alors exprimé en *mètres cubes;* on demande de calculer le volume V en supposant :

$$a = 35^{cm}$$
$$b = 120^{mm}$$
$$c = 2^{m}$$
$$d = 2^{m}\frac{5}{6}.$$

6. — Même question, en supposant :

$$a = 2^{km}$$
$$b = 3^{hm}$$
$$c = 12^{mm}$$
$$d = 14^{mm}.$$

7. — Un mobile se déplace sur un axe avec la vitesse -35, les unités de longueur et de temps étant le mètre et la seconde. A midi, son abcisse est 25^{km}; quelle est-elle à midi $5^{m}35^{s}$?

8. — Deux trains vont à la rencontre l'un de l'autre sur une même ligne; la distance qui les sépare à midi est 75^{km}; quand se rencontreront-ils, sachant que la vitesse du premier

est $22^{m},75$ à la seconde et la vitesse du second $1^{km}\frac{2}{3}$ à la minute?

9. — On considère, sur un axe, une origine O et une seconde origine O′ dont l'abscisse par rapport à O est 12^{mm}. On donne trois points A, B, C dont les abscisses par rapport à O sont respectivement 8, $\frac{2}{3}$, $-0,15$, l'unité choisie étant le centimètre et trois points A′, B′, C′ dont les abscisses par rapport à O′ sont respectivement $\frac{-2}{150}$, 0,002; $\frac{-4}{875}$, l'unité étant le mètre. Calculer les segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. Faire la figure.

10. — Démontrer que a et b étant les abscisses de deux points A et B, l'abscisse c du point C, milieu de AB, est donnée par la formule :

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

On démontrera d'abord cette formule en supposant a, b, c tous trois positifs, et on fera voir ensuite que le cas général peut se ramener à ce cas particulier par un changement d'origine.

11. — Étant donnés n points sur un axe, déterminer sur cet axe un point O tel que, si on le prend pour origine, la somme des abscisses des n points donnés soit égale à zéro.

12. — Un certain nombre de jeunes gens organisent entre eux une course de bicyclettes dans les conditions suivantes : ils partiront en même temps et l'on chronométrera les époques auxquelles ils arriveront au but. On fixera ensuite une époque A de telle manière que ceux qui seront arrivés avant l'époque A recevront un nombre de centimes égal au nombre de secondes qui se sera écoulé entre leur arrivée et l'époque A, tandis que ceux qui seront arrivés après l'époque A verseront un nombre de centimes égal au nombre de secondes qui se seront écoulées entre l'époque A et leur arrivée. Comment doit-on fixer l'époque A pour que le nombre total de centimes à recevoir par les gagnants soit égal au nombre total de centimes à verser par les perdants?

Appliquer au cas où les coureurs sont au nombre de 5 et où ils arrivent aux instants ci-après :

Jean à midi $15^m 35^s$
Jacques à midi $8^m 15^s$
Paul à $11^h 59^m 45^s$
Louis à midi $13^m 50^s$
Philippe à midi $20^m 40^s$.

13. — Une course à longue distance est organisée d'après un règlement analogue au précédent, mais on convient que la somme à verser ou à recevoir est de 5 centimes par minute et on ne note les arrivées qu'à 1/4 d'heure près; comment doit-on régler, sachant que 8 coureurs sont arrivés à $11^h 30^m$, 12 à $11^h 45^m$, 30 à midi, 18 à midi 15^m, 6 à midi 30^m, 2 à midi 45^m et 1 à $1^h 15^m$?

14. — Deux bicyclistes roulent dans le même sens sur une piste circulaire de 500^m de long; la vitesse du premier est de 30^{km} à l'heure et la vitesse du second est de $8^m,75$ à la seconde. On sait, de plus, que le premier passe au point origine A à midi $2^m 15^s$ et que le second y passe à $1^h 1^m 5^s$; quelles sont les époques, entre midi et 1^h, où l'un des bicyclistes dépasse l'autre?

15. — Un voyageur part à midi et se déplace, sans s'arrêter, avec une vitesse de 4^{km} à l'heure; un autre voyageur part à sa poursuite à 1^h et adopte le règlement suivant : marcher pendant 55^m avec une vitesse de 6^{km} à l'heure, se reposer 5^m, puis recommencer de même pendant les heures suivantes. A quel instant le second voyageur rattrapera-t-il le premier?

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS DU CALCUL ALGÉBRIQUE

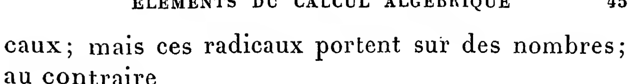
I. MONÔMES, POLYNOMES. TERMES SEMBLABLES.

27. **Expressions algébriques rationnelles.** — On appelle expression algébrique un ensemble de nombres, de lettres et de signes d'opérations (signes écrits ou sous-entendus) de telle manière que l'on puisse calculer la valeur de l'expression lorsqu'on attribue aux lettres des valeurs déterminées. Une expression algébrique est dite rationnelle lorsque les seuls signes d'opérations, *à effectuer sur les lettres*, sont l'addition, la soustraction, la multiplication[1] et la division, *à l'exclusion de l'extraction des racines*. Par exemple les expressions :

$$\frac{a}{b}, \quad 3a, \quad \sqrt{3}\,bc + \sqrt{7}\,d + \frac{e}{\sqrt[3]{12}}$$

sont des *expressions algébriques rationnelles*, bien que la dernière d'entre elles renferme des radi-

1. L'élévation à une puissance d'exposant entier est un cas particulier de la multiplication $a^4 = a \times a \times a \times a$.



caux; mais ces radicaux portent sur des nombres; au contraire

$$b + 3\sqrt{a}, \qquad \sqrt[3]{a+b}, \qquad \sqrt[3]{c} + \sqrt{d}$$

sont des *expressions algébriques irrationnelles*. Nous nous occuperons presque exclusivement des expressions rationnelles; nous rencontrerons quelquefois des expressions irrationnelles, mais nous n'en ferons pas de théorie générale.

28. **Monômes**. — On appelle monôme le produit de plusieurs nombres et lettres.

Ainsi l'expression :

$$(-3) \times a \times (-15) \times b \times a \times c \times 7 \times a \times b$$

est un monôme.

Comme la valeur d'un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs, on peut écrire à gauche tous les facteurs numériques et, de plus, réunir entre eux les facteurs représentés par une même lettre; par exemple, le monôme que nous venons de considérer peut s'écrire aussi :

$$(-3) \times (-15) \times 7 \times a \times a \times a \times b \times b \times c.$$

On peut introduire une nouvelle simplification; la valeur d'un produit ne changeant pas lorsqu'on remplace plusieurs facteurs par leur produit effectué, on remarquera que l'on a :

$$(-3) \times (-15) \times 7 = 315$$
$$a \times a \times a = a^3$$
$$b \times b = b^2,$$

de sorte que notre monôme peut finalement s'écrire

sous la forme simplifiée :

$$315a^3b^2c,$$

dans laquelle ne figure plus aucun signe opératoire explicite; les signes de multiplication sont sous-entendus ou remplacés par les exposants.

C'est sous cette forme simplifiée que nous écrirons toujours les monômes; le facteur numérique, ici 315, qu'il est d'usage d'écrire à gauche, s'appelle le *coefficient*. Le monôme

$$-3a^2b$$

a pour coefficient -3. Le coefficient d'un monôme est ainsi un nombre positif ou négatif qui peut être entier, fractionnaire, ou irrationnel. Un monôme dont le coefficient est nul est égal à zéro, car un produit de plusieurs facteurs est nul lorsqu'un de ces facteurs est nul.

29. **Monômes semblables. Addition et soustraction.** — On dit que deux monômes sont *semblables* lorsqu'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Par exemple, les monômes :

$$\sqrt{3}a^2bc^3, \quad 15a^2bc^3, \quad -12a^2bc^3,$$

sont semblables; il en est de même des monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y^5, \quad 15x^2y^5 \quad -14x^2y^5, \quad x^2y^5.$$

Le dernier de ces monômes doit être regardé comme ayant pour coefficient 1, car le produit d'un nombre quelconque par l'unité est égal à ce nombre lui-même; $1x^2y^5$ est donc la même chose que x^2y^5. De même le monôme $-x^2y^3$ doit être regardé comme ayant pour coefficient -1.

Règle. — *La somme de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable à chacun d'eux, ayant pour coefficient la somme des coefficients.*

Exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$12a^3b^2c^4x, \quad 15a^3b^2c^4x, \quad -a^3b^2c^4x, \quad -35a^3b^2c^4x.$$

Ces monômes semblables ont pour coefficients les nombres 12, 15, — 1, — 35 dont la somme est :

$$12 + 15 - 1 - 35 = -9.$$

La somme cherchée est donc $-9a^3b^2c^4x$.

Autre exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$15x^2y^3, \quad x^2y^3, \quad -14x^2y^3, \quad x^2y^3, \quad -3x^2y^3$$

dont les coefficients sont 15, 1, — 14, 1, — 3. La somme de ces coefficients est :

$$15 + 1 - 14 + 1 - 3 = 0.$$

La somme est donc un monôme semblable aux monômes proposés et de coefficient *zéro;* elle est donc égale à zéro.

Justification de la règle. — La règle se justifie par le théorème démontré dans le chapitre I (n° 12) : Pour multiplier une somme par un facteur, il suffit de multiplier par ce facteur les diverses parties de la somme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus. Si nous reprenons le premier exemple, nous voyons, en appliquant ce principe, que — 9 étant égal à la somme des nombres 12, 15, — 1, — 35, le produit de — 9 par $a^3b^2c^4x$ est égal à la somme des produits

de 12, 15, — 1, — 35 par $a^3b^2c^4x$:

$$-9a^3b^2c^4x = 12a^3b^2c^4x + 15a^3b^2c^4x + (-a^3b^2c^4x) + (-35a^3b^2c^4x),$$

ce que nous voulions démontrer.

On justifierait de la même manière la règle de la soustraction que nous nous contenterons d'énoncer.

Règle. — *La différence de deux monômes semblables est un monôme semblable à chacun d'eux ayant pour coefficient la différence des coefficients.*

Soit, par exemple, à retrancher $5a^2b$ de $8a^2b$; on retranchera 5 de 8, ce qui donne 3; la différence cherchée est $3a^2b$. Si l'on avait proposé de retrancher $8a^2b$ de $5a^2b$, il aurait fallu retrancher 8 de 5, ce qui aurait donné —3; le résultat serait donc $-3a^2b$.

Remarque. — Il n'est pas inutile de remarquer que, dans les démonstrations précédentes, on ne fait aucune hypothèse sur les valeurs attribuées aux lettres a, b, c, x qui figurent dans les monômes considérés; le résultat de l'opération est exact *quelles que soient les valeurs de ces lettres*. Dans la démonstration, on a le droit d'utiliser les principes établis pour les opérations sur les nombres, car le raisonnement que l'on fait pourrait être repris pour *chaque système de valeurs particulières* que l'on attribuerait aux lettres; il conduit donc à un résultat indépendant de ces valeurs particulières, puisqu'il est le même dans tous les cas. La même remarque s'applique à l'établissement de toutes les règles du calcul algébrique.

30. **Polynomes**. — *On appelle polynome la somme de plusieurs monômes*. Par exemple l'expres-

sion :

$$a^3b + x^2y + 12ax^3 + 35xy^3,$$

est un polynome : c'est la somme des monômes a^3b, x^2y, $12ax^3$, $35xy^3$. L'expression :

$$a^3b^2 - 3ab - 2xy + 5a^3$$

est aussi un polynome, car c'est la somme des monômes a^3b^2, $-3ab$, $-2xy$, $5a^3$.

On dit parfois qu'un polynome est une expression formée par une suite de monômes séparés par les signes + et —, mais il est préférable de conserver notre première définition, car elle permet de bien comprendre ce que l'on entend par *termes* du polynome : *ce sont les monômes dont ce polynome est la somme*. Ainsi, le polynome :

$$5a^2b - 8a^3 - a^2 + x^4$$

a 4 termes : $5a^2b$, $-8a^3$, $-a^2$, x^4.

Un polynome qui a *deux* termes s'appelle *binome;* un polynome qui a *trois* termes s'appelle *trinome;* les expressions : quadrinome, quintinome, etc., ne sont pas usitées [1].

31. **Réduction des termes semblables** — Lorsque deux termes d'un polynome sont deux monômes semblables, on dit que ce sont deux *termes semblables*. On peut, sans changer la valeur du polynome, remplacer deux ou plusieurs termes semblables par leur somme effectuée; c'est ce qu'on appelle *faire la réduction des termes semblables* Il

---

1. On écrit quelquefois binôme, trinôme, polynôme; il n'y a aucune raison pour mettre sur ces mots l'accent circonflexe qui se trouve sur monôme, contraction de mononome.

suffit d'appliquer la règle de l'addition des monômes.

EXEMPLE. — Soit le polynome :

$$35a^2b + 15xy - 12a^2b + a^3 - xy + 14a^2b - 50a^2b - 8a^3;$$

il est commode, pour effectuer la réduction des termes semblables, de l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} 35a^2b & + 15xy & \\ -12a^2b & & + a^3 \\ & - xy & \\ + 14a^2b & & \\ -50a^2b & & -8a^3. \end{array}$$

Les termes semblables étant écrits dans des colonnes verticales, on effectue ensuite l'addition des coefficients d'une même colonne :

$$\begin{array}{r} 35 - 12 + 14 - 50 = -13 \\ 15 - 1 = 14 \\ 1 - 8 = -7. \end{array}$$

Le polynome proposé peut donc s'écrire sous la forme plus simple :

$$-13a^2b + 14xy - 7a^3.$$

AUTRE EXEMPLE. — Soit le polynome :

$$x^3 + 5x^2 - 8 - 3x^2 - 2x^2 + 15 + 6x - 2 - 3x.$$

On trouve qu'il est égal à :

$$(1 - 3)x^3 + (5 - 2)x^2 + (6 - 3)x + (-8 + 15 - 2),$$

c'est-à-dire à :

$$-2x^3 + 3x^2 + 3x + 5.$$

32. **Degré d'un monôme et d'un polynome.** — On appelle degré d'un monôme par rapport à l'une des lettres x qu'il renferme, l'exposant de cette lettre x dans le monôme. Ainsi le monôme

$$3ab^2c^3x^2y$$

est de degré 2 par rapport à x, de degré 3 par rapport à c, de degré 1 par rapport à y, etc.; il est de degré *zéro* par rapport à z, car il ne renferme *aucun* facteur égal à z. Le degré d'un monôme *par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres* est, par définition, égal à la somme de ses degrés par rapport à chacune de ces lettres. Par exemple, le monôme écrit plus haut est de degré 3 par rapport à l'ensemble des lettres x et y, de degré 6 par rapport à l'ensemble des lettres a, b, c; son *degré total*, c'est-à-dire son degré par rapport à l'ensemble de toutes les lettres qu'il renferme, est 9.

On appelle degré d'un polynome par rapport à une lettre le degré de celui de ses termes dont le degré est le plus élevé; on définit de même le degré d'un polynome par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres. On suppose d'ailleurs que l'on a fait la réduction des termes semblables. Ainsi le polynome :

$$3a^2x^3 + 6a^4x - a^5x^2$$

est de degré 5 par rapport à a et de degré 3 par rapport à x; son degré total est 7; il n'est pas égal à la somme des degrés partiels, parce que le terme dont le degré par rapport à a est le plus élevé n'est pas le même que le terme dont le degré par rapport à x est le plus élevé.

lettres, et on groupe ensemble les termes semblables (on utilise, en fait, pour cela, la règle de multiplication d'un polynome par un monôme, qui sera énoncée au n° 39).

Par exemple, si l'on a le polynome :

$$-a^3x^2y + 3x^2y - bxy^2 + cxy^2 + ax + 3x - y,$$

on l'écrira comme il suit :

$$(-a^3 + 3)x^2y + (-b + c)xy^2 + (a + 3)x - y;$$

c'est un polynome du 3ième degré en x et y, le coefficient de x^2y est $-a^3 + 3$, etc.

II. ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES.

35. — Les règles des opérations sur les monômes et les polynomes sont une conséquence immédiate des règles et des théorèmes concernant les opérations sur les nombres; nous avons d'ailleurs utilisé, dans le paragraphe précédent, certaines de ces règles, qui sont à peu près évidentes; pour être complet, nous allons les reprendre ici.

36. **Addition et soustraction des monômes.** Règle. — *Pour ajouter plusieurs monômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres avec leurs signes; pour retrancher un monôme, il suffit d'ajouter le monôme opposé.* Cette règle conduit comme résultat à un polynome dans lequel, s'il y a lieu, on fait la réduction des termes semblables.

Exemple. — Ajouter les monômes :

$$15a^2x, \quad -3a^2x, \quad 15a^3y, \quad -a^2x - a^3y.$$

On obtient le polynome :

$$15a^2x - 3a^2x + 15a^3y - a^2x - a^3y,$$

qui s'écrit, plus simplement :

$$11a^2x + 14a^3y.$$

AUTRE EXEMPLE. — Ajouter les monômes :

$$a^3x, \qquad -a^2y, \qquad a^3,$$

et retrancher du résultat les monômes :

$$-a^3x, \qquad -3a^2y, \qquad -a^4, \qquad 2a^2y.$$

On obtient :

$$a^3x - a^2y + a^3 + a^3x + 3a^2y + a^4 - 2a^2y,$$

ou, plus simplement :

$$2a^3x + a^3 + a^4.$$

37. **Addition et soustraction des polynomes.** RÈGLE. — *Pour ajouter ou retrancher un polynome, il suffit d'ajouter ou retrancher successivement tous les termes de ce polynome.*

Dans le résultat ainsi obtenu, on fait, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

EXEMPLE. — Ajouter les polynomes suivants :

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4,$$
$$-b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x,$$
$$-3b^3 - 6a^4 + 15a^2x - 9.$$

On obtient le polynome :

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4 - b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x$$
$$-3b^3 - 6a^4 + 15a^2x - 9$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$21a^2x - 3b^3 - 3a^4 - 11.$$

Autre exemple. — Retrancher le polynome :

$$3a^2x - 9a^3x^2 - 6a^2x^2$$

du polynome :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2.$$

On obtient :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2 - 3a^2x + 9a^3x^2 + 6a^2x^2,$$

ou, plus simplement :

$$6a^2x + 27a^3x^2 + 5a^2x^2.$$

Règle pratique. — *Lorsqu'une somme ou différence de polynomes est indiquée par des parenthèses, pour l'effectuer, on supprime les parenthèses, en ayant soin de changer les signes des termes situés à l'intérieur de celles qui sont précédées du signe —.*

Exemple. — Soit à calculer :

$$a^3 + b^2 - (3a^3 - 2b^2) + (-a^3 + b^2) - (-6a^3 + 4b^2).$$

On obtient :

$$a^3 + b^2 - 3a^3 + 2b^2 - a^3 + b^2 + 6a^3 - 4b^2,$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$3a^3.$$

Remarque. — Pour faciliter la réduction des termes semblables, il est souvent commode d'écrire les uns au-dessous des autres tous les termes semblables entre eux; cette remarque est surtout utile

dans le cas où l'on ajoute des polynomes ordonnés.

EXEMPLE. — Faire la somme des polynomes :

$$3x^3 - 5x^2 + 3x - 4$$
$$-2x^3 - x^2 - 6$$
$$9x^2 - 6x - 7$$
$$8 - x^3.$$

On disposera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{rrrr} 3x^3 & -5x^2 & +3x & -4 \\ -2x^3 & -x^2 & & -6 \\ & 9x^2 & -6x & -7 \\ -x^3 & & & +8 \\ \hline 0x^3 & +3x^2 & -3x & -9 \end{array}$$

On ajoute entre eux les coefficients des mêmes puissances de x, placés les uns au-dessous des autres; on obtient ainsi le résultat cherché :

$$0x^3 + 3x^2 - 3x - 9,$$

c'est-à-dire :

$$3x^2 - 3x - 9,$$

puisqu'un monôme à coefficient nul est nul.

38. **Multiplication des monômes.** — *Le produit de deux monômes est un monôme admettant comme coefficient le produit des coefficients et comme partie littérale le produit des parties littérales.*

Soit, par exemple, à multiplier les deux monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y \qquad -\frac{5}{6}ab^2.$$

Le produit de $\frac{3}{4}$ par $-\frac{5}{6}$ est $-\frac{5}{8}$; le produit

cherché est :

$$-\frac{5}{8}x^2yab^2.$$

De même, le produit des monômes :

$$-\frac{2}{3}ab^3 \qquad -\frac{3}{4}a^2b$$

est :

$$\frac{1}{2}ab^3a^2b.$$

Ce monôme peut d'ailleurs s'écrire plus simplement en groupant les facteurs égaux :

$$\frac{1}{2}a^3b^4.$$

On remarque qu'une lettre telle que a admet pour exposant la somme des exposants qu'elle admettait dans les deux facteurs. On déduit de cette remarque la règle pratique suivante :

Règle pratique. — *Pour former le produit de deux ou plusieurs monômes, on écrit d'abord le produit des coefficients* (pris avec leurs signes); *on écrit ensuite toutes les lettres distinctes qui figurent dans les facteurs en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les divers facteurs.*

Soit, par exemple, à effectuer le produit des monômes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}a^3b^2c \qquad -\frac{2}{\sqrt{2}}ax^2y^3 \qquad -\frac{5}{3}ab^3x^2.$$

Le produit des coefficients $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-5}{3}$ est

$\frac{3 \times 2 \times 5}{2 \times 3} = 5$; l'exposant de la lettre a doit être $3 + 1 + 1 = 5$; l'exposant de b : $2 + 3 = 5$; l'exposant de c : 1; l'exposant de x : $2 + 2 = 4$; l'exposant de y : 3. Le produit est donc :

$$5a^5b^5cx^4y^3.$$

39. **Multiplication d'un polynome par un monôme.** Règle. — *Pour multiplier un polynome par un monôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Cette règle est une conséquence immédiate de la propriété distributive de la multiplication (n° 12).

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$3a^2 - 2b^3 + x + 5y$$

par le monôme :

$$- abx^2.$$

On obtient :

$$- 3a^3bx^2 + 2ab^4x^2 - abx^3 - 5abx^2y.$$

40. **Multiplication de deux polynomes.** Règle. — *Pour multiplier deux polynomes, il suffit de multiplier l'un d'eux successivement par tous les termes de l'autre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Cette règle est aussi une conséquence de la propriété distributive de la multiplication.

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$a^2b - ab + 3b^2$$

par le polynome :

$$a^2 - 2ab + 3b^2.$$

On multiplie d'abord le premier polynome par a^2, ce qui donne :

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2.$$

On le multiplie ensuite par $-2ab$, ce qui donne :

$$-2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3.$$

Enfin, on le multiplie par $3b^2$, ce qui donne :

$$3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4.$$

Il ne reste plus qu'à ajouter ces trois *produits partiels ;* on obtient :

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3 \\ + 3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4,$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$a^4b - a^3b + 5a^2b^2 - 2a^3b^2 - 9ab^3 + 3a^2b^3 + 9b^4.$$

41. **Cas des polynomes ordonnés. Disposition pratique.** — Dans le cas où l'on doit multiplier deux polynomes renfermant une seule lettre x, il est commode de les ordonner et de donner à l'opération une disposition particulière que nous allons indiquer sur un exemple.

Exemple. — Soit à multiplier les deux polynomes :

$$3x^3 - 2x^2 + 6x + 1$$
$$2x^2 + 5x - 7.$$

On disposera l'opération comme il suit :

$$
\begin{array}{r}
3x^3 - 2x^2 + 6x + 1 \\
2x^2 + 5x - 7 \\
\hline
6x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 2x^2 \qquad\qquad\qquad \\
15x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 5x \qquad \\
- 21x^3 + 14x^2 - 42x - 7 \\
\hline
6x^5 + 11x^4 - 19x^3 + 46x^2 - 37x - 7
\end{array}
$$

On a écrit d'abord l'un des deux polynomes au-dessous de l'autre et tiré un trait au-dessous duquel sont écrits les produits partiels, ici au nombre de 3, que l'on obtient en multipliant le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur; ces produits partiels sont disposés, comme il a été expliqué pour l'addition, de manière qu'on puisse en faire commodément la somme, qui est inscrite au-dessous du second trait.

Autre exemple. — Multiplier $x^4 + x^2 + 2x + 1$ par $x^3 - x^2 - 1$. L'opération se dispose ainsi qu'il suit :

$$
\begin{array}{r}
x^4 \qquad + x^2 + 2x + 1 \\
x^3 - x^2 \qquad - 1 \\
\hline
x^7 \qquad + x^5 + 2x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad \\
- x^6 \qquad\qquad - x^4 - 2x^3 - x^2 \qquad\qquad \\
- x^4 \qquad\quad - x^2 \quad - 2x - 1 \\
\hline
x^7 - x^6 + x^5 \qquad\qquad - x^3 - 2x^2 - 2x - 1.
\end{array}
$$

On a eu soin de laisser des blancs correspondant aux degrés pour lesquels il n'y avait pas de termes.

Remarque. — L'égalité qui exprime le résultat des opérations effectuées s'appelle une *identité;* les deux membres deviennent *identiques* lorsqu'on les

simplifie ; ainsi l'égalité

$$x(x-1) = 2x^2 - x(x+1)$$

est une *identité*. Nous donnons aux Exercices quelques exemples d'identités à vérifier.

III. DIVISION DES MONÔMES, D'UN POLYNOME PAR UN MONÔME

42. **Division des monômes.** — On dit qu'un monôme est divisible par un autre lorsqu'il existe un troisième monôme qui multiplié par le second reproduit le premier. La règle de la division est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

Règle. — *Le quotient de deux monômes a pour coefficient le quotient des coefficients et renferme chaque lettre avec un exposant égal à la différence de ses exposants dans le dividende et dans le diviseur.*

Exemple. — Soit à diviser $35a^3b^2xy$ par $7abx$; on obtient :

$$5a^2by.$$

Il est inutile d'écrire la lettre x, dont l'exposant devrait, d'après la règle, être égal à zéro; nous avons déjà remarqué (page 51) que cela signifie qu'il n'y a *aucun* facteur égal à x. Nous énoncerons donc la remarque complémentaire suivante, qui est importante :

Remarque. — *On peut supprimer dans un produit toute lettre affectée de l'exposant zéro; en d'autres termes, on peut remplacer le facteur x^0 par* 1.

43. **Règle de divisibilité.** — Nous avons énoncé la règle de la division en supposant que le dividende était divisible par le diviseur : elle est alors une conséquence de la règle de la multiplication; pour qu'il y ait divisibilité, il est nécessaire et suffisant que la règle soit applicable, c'est-à-dire que le diviseur ne renferme aucune lettre ne figurant pas dans le dividende, et ne renferme les lettres y figurant qu'avec un exposant au plus égal à celui qu'elles ont dans le dividende. Lorsque le dividende n'est pas divisible par le diviseur, on se borne à indiquer la division : on a une fraction.

44. **Division d'un polynome par un monôme.** Règle. — *Pour diviser un polynome par un monôme, il suffit de diviser successivement tous les termes du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Exemple. — Diviser le polynome :

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax,$$

par le monôme $15ax$. On obtient :

$$\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}.$$

Remarque. — Pour qu'un polynome (dans lequel on a réduit les termes semblables) soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que chacun de ses termes le soit.

45. **Remarque sur la division.** — Lorsque la division n'est pas possible, on se borne à l'indiquer, en employant la notation des fractions; par définition, A et B étant deux expressions algébriques

quelconques, la notation $\frac{A}{B}$ indique une expression algébrique dont la valeur est égale au quotient de la valeur de A par la valeur de B ; c'est le *quotient* de A par B et l'on a, par définition :

$$\frac{A}{B} \times B = A.$$

Dans les applications que l'on peut avoir à faire de cette égalité fondamentale, il y a lieu d'apporter une attention spéciale au cas où B serait égal à zéro pour les valeurs particulières données aux lettres ; on ne sait pas, en effet, ce qu'est le quotient d'un nombre par zéro ; nous verrons, dans la théorie des équations du premier degré, que l'on est amené à désigner ce quotient par le symbole ∞ (que l'on énonce : *infini*) ; nous discuterons aussi le cas où A serait nul en même temps que B ; ce qu'il y a simplement lieu de retenir pour l'instant, c'est que *dans le cas où le dénominateur* B *d'une fraction utilisée dans le cours des calculs se trouve être égal à zéro, il y a lieu de ne pas accorder une confiance absolue au résultat et d'examiner la question de plus près.*

Cette remarque doit être sous-entendue, en particulier, dans le paragraphe par lequel nous allons terminer ce chapitre.

46. **Fractions rationnelles.** — On donne le nom de *fractions rationnelles* aux fractions dont les deux termes sont des polynomes (ou, comme cas particulier, des monômes).

Voici des exemples de fractions rationnelles :

$$\frac{3a^2b}{5b^2c^3}, \qquad \frac{a-b}{c-d}, \qquad \frac{a^2+x^2-y^3}{a^2x^4-y^5+z}.$$

On appelle *degré* d'une fraction rationnelle le degré de celui de ses deux termes dont le degré est le plus élevé; par exemple, la fraction :

$$\frac{ax+b}{a'x+b'},$$

que nous étudierons en détail au chapitre VIII, est *du premier degré en x;* c'est même l'expression *générale* de la fraction du premier degré en x, si l'on admet que a, b, a', b' peuvent désigner des *expressions algébriques quelconques indépendantes de x* (c'est-à-dire ne renfermant pas x).

Le calcul des fractions rationnelles est soumis aux mêmes règles que celui des fractions arithmétiques; c'est là une conséquence immédiate des nos 14, 15, 16 et du fait que les lettres tenant la place des nombres, les opérations légitimes sur les lettres le sont aussi sur les nombres.

En particulier, on peut simplifier les fractions en divisant le numérateur et le dénominateur par un facteur commun; on peut aussi réduire plusieurs fractions au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune d'elles par un facteur convenablement choisi.

Dans le cas où les termes des fractions sont des monômes, les règles pour la formation du p. g. c. d. et du p. p. c. m. sont les mêmes qu'en arithmétique pour les produits de facteurs premiers; il est donc très aisé de réduire les fractions *à leur plus simple expression* et aussi de réduire plusieurs fractions *au plus petit dénominateur commun*. Il y a lieu de remarquer que l'on regardera une fraction comme plus simple qu'une autre lorsque ses termes seront

de degrés respectivement moins élevés ; cela ne veut pas dire qu'ils sont *plus petits*, car leur grandeur relative dépend évidemment des valeurs données aux lettres qui y figurent; un sens analogue doit être donné aux mots *plus petit dénominateur commun*.

Par exemple, soit la fraction :

$$\frac{3a^2bc}{6abc^2},$$

on la simplifiera en divisant les deux termes par $3abc$, ce qui donne :

$$\frac{a}{2c}.$$

Si l'on suppose que l'on ait :

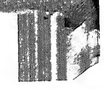
$$a = 10 \qquad b = 0{,}001 \qquad c = 20,$$

on a :

$$3a^2bc = 6$$
$$6abc^2 = 24,$$

de telle sorte que la fraction proposée se réduit à $\frac{6}{24}$ et la fraction *simplifiée* à $\frac{10}{40}$. On doit cependant, au point de vue algébrique, considérer la seconde fraction comme plus simple que la première.

Lorsque les termes des fractions sont des polynomes, nous ne pouvons donner ici les règles générales pour trouver leur p. g. c d. et leur p. p. c. m. ; on doit donc se borner à simplifier les fractions par la suppression d'un facteur commun aux deux termes, lorsqu'on aperçoit un tel facteur et, pour la réduction au même dénominateur de plusieurs frac-



tions, se contenter de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres, à moins que la pratique du calcul ne suggère quelque simplification.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

16. — Additionner les polynomes suivants :

$$3x^2 + ax + b;$$
$$-5x + 3ax^2 + c + b;$$
$$-8ax + 5x^2 + c^2 + b;$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

17. — Additionner les polynomes suivants :

$$5x^3 - 8ax^2 + 5bx - c$$
$$ax^2 - 3x^3 - 4c - 12bx$$
$$9cx^2 + 12ax^3 + 5bx - 15,$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

18. — Faire le produit des monômes suivants :

$$\frac{3}{5}ax^2, \qquad \frac{5}{4}a^3bxy, \qquad \frac{-5}{7}a^2x^2y^2.$$

19 — Faire le produit des monômes suivants :

$$\frac{3}{5}a^4x^3, \qquad \frac{-1}{3}a^2x^4, \qquad \frac{-5}{6}a^3x^7, \qquad \frac{2}{5}abx^2.$$

20. — Faire le produit des monômes suivants :

$$-\frac{5}{7}a^2x^5, \qquad \frac{3}{4}abcx^7y, \qquad \frac{-5}{6}a^2c^2y^8; \qquad -\frac{3}{4}xy^3.$$

21. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$abx + a^2y + b^2x$$
$$aby + a^2x - b^2y.$$

22. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$3x^3 - 5x^2 + 6x - 7$$
$$2x^2 - 6x + 5.$$

23. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$2x^2 - 6x + 4$$
$$4x^2 - 8x + 3.$$

24. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$x^2 + 2ax + a^2 - b^2$$
$$x^2 + 2bx + b^2 - a^2 - 3ab,$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

25. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$ax^2 + bx + c$$
$$a'x^2 + b'x + c',$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

26. — Faire le produit des polynomes suivants :

$$ax^3 + 2a^2x^2 + 6a^3x - a^4$$
$$x^2 - 5ax + 8a^2.$$

27. — Calculer le carré de $a + b$.

28. — Calculer le cube de $a + b$.

29. — Calculer la quatrième puissance de $a + b$.

30. — Calculer le carré, le cube, la quatrième puissance de $a - b$.

31. — Calculer le carré, le cube, la quatrième puissance de $1 + x$; de $1 - x$.

32. — Calculer le carré de $a + b + c$.

33. — Calculer le cube de $a + b + c$.

34. — Calculer le carré de $a + b + c + d$.

35. — Calculer le carré de $a + b + c + d + e$.

36. — Calculer le carré de $x + y - z - u - v$.

37. — Calculer le carré de $x - y + z - u + v$.

38. — Calculer le carré des polynomes suivants :

$$3x^2 - 5x + 4$$
$$2x^2 - 6x + 5$$
$$3x + 5y - 9$$
$$8x + 2y - 5.$$

39. — Effectuer le produit de $a + b$ par $a - b$.

40. — Effectuer le produit de $a^2 + ab + b^2$ par $a - b$.

41. — Effectuer le produit de $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ par $a - b$.

42. — Effectuer le produit de $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ par $a - b$. Généraliser.

43. — Effectuer le produit de $a^2 - ab + b^2$ par $a + b$.

44. — Effectuer le produit de $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ par $a + b$. Généraliser.

45. — Effectuer le produit :

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

46. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2.$$

47. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2.$$

48. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax + by + cz + dt)^2 + (at - dx + bz - cy)^2 + (bt - dy + cx - az)^2 + (ct - dz + ay - bx)^2.$$

49. — Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{4a^3bcx}{2b^2c^2y^2}, \qquad \frac{15a^3bc^2xy}{50abcx^2z}, \qquad \frac{15a^4bc^3xyz}{12abc^4y^2}.$$

50. — Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}; \qquad \frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}; \qquad \frac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3}.$$

On utilisera les résultats des exercices 39 à 44.

51. — Faire le produit des fractions suivantes :

$$\frac{a^3bx}{ab^2y} \times \frac{ab^2x^2}{cxz} \times \frac{3ab^4x}{5a^2bx^2y};$$

simplifier le résultat obtenu.

52. — Faire la somme des fractions suivantes :

$$\frac{ax}{y} + \frac{by}{x} + \frac{ab + a^2 - b^2 + 3a - 5b}{xy}.$$

53. — Effectuer les additions et soustractions suivantes :

$$\frac{a^2x}{y} + \frac{by}{x} - \frac{(a^2+b^2)y^2}{x^2} - \frac{3abx^2}{y^2}.$$

54. — Réduire au même dénominateur les fractions suivantes :

$$\frac{1}{a+b} \qquad \frac{2}{a-b} \qquad \frac{4a}{a^2-b^2} \qquad \frac{6a^2}{a^2+b^2}.$$

On remarquera que l'on peut prendre $a^4 - b^4$ comme dénominateur commun.

55. — Effectuer les opérations suivantes :

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}$$

$$\frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a} + \frac{c^2}{a-b}$$

$$\frac{a^3}{b-c} + \frac{b^3}{c-a} + \frac{c^3}{a-b}.$$

56. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}.$$

57. — Vérifier l'identité :

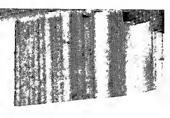
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right).$$

58. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(x-a)(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(x-c)(c-a)(c-b)}.$$

59. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = \frac{1}{(x-a)(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(x-c)(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)}$$



CHAPITRE III

ÉQUATIONS ET INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ

I. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

47. **Généralités sur les équations.** — On appelle équation une égalité renfermant une ou plusieurs lettres, appelées *inconnues* ou *variables;* en général, cette égalité n'est vérifiée que si l'on attribue certaines valeurs à ces lettres. Par exemple :

$$2x + 3 = x + 5$$

est une équation à une inconnue x; cette égalité est vérifiée pour $x = 2$ et n'est pas vérifiée pour $x = 1$.

De même :

$$x + 4 = y + 6 - 3x$$

est une équation à deux *inconnues* ou deux *variables* x et y; elle est vérifiée par exemple pour $x = 2$, $y = 6$ ou pour $x = -4$, $y = 6$, ou pour $x = 1$, $y = 2$; elle n'est pas vérifiée pour $x = 0$,

$y = 0$. Elle est donc vérifiée pour certains *systèmes de valeurs des variables* et pas par tous.

L'égalité :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

est aussi une équation; elle est vérifiée pour $x = 2$; elle n'est pas vérifiée pour $x = 3$, comme on s'en assure aisément.

On considère souvent des équations qui, outre les *variables* ou *inconnues*, renferment d'autres lettres que l'on appelle, par opposition, *constantes* ou *données;* on emploie d'habitude pour les inconnues les dernières lettres de l'alphabet et pour les *données* les premières.

Ainsi, on peut considérer une équation telle que la suivante :

$$x + a - 3 = +5x - 6a + 3y.$$

Elle est vérifiée pour $x = a$, $y = a - 1$, comme on le constate sans peine en *substituant* ces valeurs à x et y, c'est-à-dire en remplaçant x par a et y par $a - 1$.

Une équation qui serait vérifiée pour *toutes* les valeurs des variables ne serait plus une équation, mais une identité. Ainsi l'égalité

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

est une identité L'identité peut donc être regardée comme un cas particulier de l'équation, lorsque l'on a une équation on doit d'abord se demander si elle est ou n'est pas *identique*.

Une équation se compose de deux expressions

algébriques séparées par le signe $=$; ce sont les deux *membres* de l'équation; l'expression écrite à gauche est *le premier membre;* l'autre est *le second membre.*

48. **Théorèmes généraux**. Principe. — *On peut ajouter une même quantité aux deux membres d'une équation sans modifier la ou les solutions de cette équation.*

Car, si deux quantités sont égales, on obtient d'autres quantités égales en leur ajoutant une troisième quantité quelconque

De ce principe résulte un théorème fondamental.

Théorème I. — *On peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.*

Démonstration. — Soit l'équation :

$$3x + 5y + 7 = 8a - 9 + x,$$

et soit proposé de faire passer le terme x du second membre dans le premier. Il suffit d'ajouter $-x$ aux deux membres; comme $x - x$ donne zéro dans le second membre, on obtient :

$$3x + 5y + 7 - x = 8a - 9,$$

ce qui démontre le théorème. On peut faire passer tous les termes d'une équation dans le premier membre; le second membre se réduit alors à *zéro.* Ainsi *toute équation peut prendre la forme*

$$A = 0,$$

en désignant par A une certaine expression algébrique plus ou moins compliquée. Nous considére-

rons presque exclusivement les équations telles que A se réduise à un polynome; *on appelle alors degré de l'équation le degré de ce polynome par rapport aux inconnues.*

Dans le cas où A est une somme de fractions rationnelles, on peut réduire ces fractions au même dénominateur et en faire la somme; l'équation prend alors la forme :

$$\frac{M}{N} = 0.$$

M et N étant des polynomes, considérons l'équation :

$$M = 0,$$

et une solution de cette équation, c'est-à-dire des valeurs particulières données aux inconnues, x, y,... et telles que M soit nul par la substitution de ces valeurs. *Si ces valeurs n'annulent pas* N, il est clair que la relation $M = 0$ entraîne $\frac{M}{N} = 0$, il n'en est pas de même si ces valeurs annulent N; *on ne peut alors rien affirmer*, car *le quotient de zéro par zéro n'est pas défini.*

Soit, par exemple, l'équation :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} = 0;$$

si l'on suppose $x = 2$, on a :

$$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$
$$2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = 1;$$

donc $x = 2$ est une solution de l'équation Si l'on

suppose $x = 3$, on a :

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$
$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0;$$

donc $x = 3$ n'est pas une solution.

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une équation se réduit au quotient de deux polynomes, on obtient ses solutions en cherchant les valeurs des inconnues qui annulent le numérateur et qui n'annulent pas le dénominateur.* On peut donc remplacer l'équation proposée par l'équation obtenue en égalant le numérateur à zéro, *en se réservant d'examiner ultérieurement si les solutions trouvées annulent ou non le dénominateur.* Cette opération s'appelle *chasser les dénominateurs.*

En particulier, il peut arriver que le dénominateur soit *un nombre*, tel que 15 ou 35; il est clair alors que l'on peut le supprimer sans changer en rien les solutions de l'équation; nous en verrons bientôt des exemples.

Dans le cas où le dénominateur renferme des *lettres connues*, est par exemple $3a - 5$, il y a lieu d'observer que, suivant la valeur de ces lettres (ici de a), *ou bien* il est nul quelles que soient les inconnues, *ou bien* il est différent de zéro quelles que soient les inconnues; car il ne dépend pas des valeurs attribuées aux inconnues; cette remarque est importante dans la *discussion* des problèmes que nous défininons au prochain chapitre).

91. **Exemples d'équations du premier degré à une inconnue.** — Soit l'équation :

$$3 + 5x = 8x - 1.$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre; nous obtenons :

$$5x - 8x + 3 + 1 = 0,$$

ou, en réduisant :

$$-3x + 4 = 0,$$

c'est donc une équation du premier degré; en faisant passer le terme connu dans le second membre, nous obtenons :

$$-3x = -4.$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit que x soit tel que son produit par -3 soit égal à -4; x doit donc, d'après la définition même de la division, être égal au quotient de -4 par -3, c'est-à-dire que l'on a :

$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Telle est la solution de l'équation proposée; la méthode même par laquelle nous l'avons obtenue montre qu'elle est unique.

Autre exemple. — Soit l'équation :

$$6x + (x - 3)(x - 1) = x^2 - \frac{3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

En faisant passer tous les termes dans le premier membre et en effectuant, on obtient :

$$6x + x^2 - 4x + 3 - x^2 + \frac{3x}{7} - \frac{13}{4} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left(6 - 4 + \frac{3}{7}\right)x + 3 - \frac{13}{4} = 0.$$

C'est une équation du premier degré que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{17}{7}x = \frac{1}{4}$$

d'où l'on tire, par le même raisonnement que tout à l'heure :

$$x = \frac{1}{4} : \frac{17}{7} = \frac{7}{68}.$$

On déduit de ces exemples la règle pratique suivante :

Règle. — *Lorsqu'on s'est assuré qu'une équation est du premier degré en faisant passer tous ses termes dans le premier membre, on isole l'inconnue dans le premier membre et le terme connu dans le second; la solution s'obtient alors en divisant ce terme connu par le coefficient de l'inconnue.*

Remarque. — Pratiquement, lorsque l'équation proposée est simple, il n'est pas nécessaire de faire passer tous les termes dans le premier membre pour s'assurer qu'elle est du premier degré; il est préférable d'appliquer seulement la seconde partie de la règle, c'est-à-dire de faire passer les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second.

Exemple. — Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{2}x + 7 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 9.$$

On obtiendra d'abord :

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)x = -9 - 7 + \frac{7}{4}.$$

Puis, successivement :

$$\frac{1}{4}x = \frac{7-64}{4} = -\frac{57}{4}.$$

$$x = -\frac{57}{4} : \frac{1}{4} = -57.$$

50. **Équations à coefficients littéraux.** — La règle est la même, lorsque l'équation, outre l'inconnue x, renferme d'autres lettres *données* a, b, c. Soit, par exemple, l'équation :

$$3ax + b = cx + 4.$$

On l'écrira comme il suit :

$$(3a - c)x = 4 - b,$$

et on en déduira que x est égal au quotient de $4 - b$ par $3a - c$, ce que l'on écrira, en employant la notation des fractions rationnelles :

$$x = \frac{4 - b}{3a - c}.$$

Il n'y a pas lieu de *simplifier* cette fraction. Si l'on avait :

$$3abx = a^3b^2,$$

on obtiendrait, par la règle de division des monômes :

$$x = \frac{a^3b}{3ab} = \frac{1}{3}a^2b.$$

Si l'on a l'équation :

$$(a - b)x = a^2 - b^2$$

on écrit

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}.$$

on sait (Exercice 39) que l'on a identique-

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

on suppose que $a - b$ n'est pas nul, on
n simplifiant :

$$x = a + b.$$

, dans ce cas, il y a un seul nombre qui,
par $a - b$, donne pour produit $a^2 - b^2$ et
que $a + b$ satisfait à cette condition. Si
it nul, l'équation proposée se réduirait à
té.

— *Pour résoudre une équation du premier
'écrit sous la forme :*

$$Ax = B,$$

*nt des expressions algébriques ne renfer-
r; la solution est alors donnée par la for-*

$$x = \frac{B}{A},$$

*elle on se borne à indiquer la division,
ne peut ou ne sait pas l'effectuer. On
'ailleurs, lorsque c'est possible, la frac-*

tenant compte de la remarque du n° 45

cussion. — Considérons l'équation du
egré :

$$ax = b,$$

elle a et b désignent deux nombres don-
onques. *Discuter* cette équation, c'est

étudier les circonstances diverses qui peuvent se présenter, suivant les valeurs des nombres a et b. Ces valeurs peuvent être des nombres positifs ou négatifs, ou bien le nombre zéro. Supposons d'abord que a ne soit pas égal à zéro, il existe alors, quel que soit b, un nombre et un seul qui, multiplié par a, donne pour produit b; on désigne ce nombre par $\frac{b}{a}$; l'équation est donc vérifiée lorsqu'on y remplace x par $\frac{b}{a}$ et seulement dans ce cas, elle admet *une seule* solution bien déterminée; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque le coefficient a de x n'est pas nul, l'équation du premier degré $ax = b$ admet une solution unique et bien déterminée.*

Supposons maintenant que a soit nul; on peut dire alors qu'il n'y a plus d'équation, puisque x disparaît. Ce cas ne se présenterait donc pas si l'on ne considérait que des équations numériques, car on n'aurait jamais pensé à regarder comme une équation une égalité ne renfermant pas x; mais lorsque les coefficients sont des lettres, il peut arriver que l'on soit conduit, par le problème posé, à donner dans certains cas à ces lettres des valeurs telles que a prenne la valeur zéro; on saisira la portée de cette remarque en étudiant le chapitre suivant. On se propose de savoir ce que devient la solution dans ce cas particulier.

Supposons d'abord que a étant égal à zéro, b soit différent de zéro; il n'existe alors aucun nombre x, qui, multiplié par a, donne pour produit b, l'équation est *impossible*. On remarquera que, si a

est très petit, $\frac{b}{a}$ est très grand en valeur absolue, et d'autant plus grand que a est plus petit, il est donc naturel de dire que la solution disparaît en devenant infiniment grande et de la représenter par le symbole ∞ (déjà utilisé au nº 43 de l'Algèbre premier cycle et au nº 110 des Notions d'Algèbre).

Supposons enfin que a et b soient nuls tous les deux; alors tout nombre vérifie l'équation, puisque tout nombre multiplié par zéro donne pour produit zéro; on dit alors que l'équation est *indéterminée ;* elle admet pour solution *un nombre quelconque*. La formule dans ce cas se réduit à la forme $\frac{0}{0}$ puisque b et a sont tous deux nuls; aussi dit-on quelquefois que $\frac{0}{0}$ est un symbole d'indétermination. On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION $ax = b$

HYPOTHÈSES	LA SOLUTION :	ON DIT QUE L'ÉQUATION EST	FORMULE OU SYMBOLE
$a \neq 0$	est unique	déterminée	$x = \frac{b}{a}$
$a = 0$, $b \neq 0$	n'existe pas	impossible	$x = \infty$
$a = 0$, $b = 0$	est un nombre quelconque	indéterminée	$x = \frac{0}{0}$

II. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

52. **Systèmes d'équations.** — On dit que plusieurs équations forment un *système* lorsque l'on suppose que les inconnues ou variables qui y sont désignées par les mêmes lettres doivent y être remplacées par les mêmes nombres; lorsque ces nombres vérifient toutes les équations, ils constituent *une solution du système*.

Par exemple le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

admet la solution $x = 2$, $y = 1$; le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 2x^2 + 3y^2 - z = 4 \end{cases}$$

admet la solution $x = 1$, $y = 2$, $z = 10$.

On dit que deux systèmes sont *équivalents* lorsqu'ils admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire lorsque toute solution du premier est solution du second et que toute solution du second est solution du premier.

La méthode que nous avons suivie pour résoudre une équation du prémier degré à une inconnue revenait au fond à remplacer cette équation par une équation équivalente plus simple; de même, pour résoudre un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, on cherche à le remplacer par un système équivalent plus simple. Nous allons étudier d'abord les systèmes d'équations, en

commençant par les systèmes à deux inconnues, par une méthode très élémentaire, nous reprendrons ensuite, d'une manière plus détaillée et plus complète, le cas de deux équations à deux inconnues.

53. **Système de deux équations à deux inconnues.** — Étant donné un système d'équations du premier degré, on commence par simplifier chacune des équations en opérant comme nous avons fait dans le cas d'une inconnue, c'est-à-dire en réunissant les termes inconnus dans les premiers membres et les termes connus dans les seconds.

Soient, par exemple, les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 + 2x = 4 - 5y \\ 2 - 2y = 6 - 3x. \end{array} \right.$$

On peut les écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 4. \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, nous emploierons la méthode dite *de substitution*. Il s'agit de déterminer des valeurs de x et de y qui vérifient ces deux équations. Si l'on connaissait la valeur de x, la première équation donnerait la valeur de y par la formule

$$y = \frac{1 - 2x}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x,$$

dans laquelle x aurait une valeur déterminée.

Cette valeur de y doit vérifier la seconde équation, dans laquelle la lettre x a la *même* valeur, d'après la définition d'un système ; si l'on *substitue*

cette valeur de y dans cette seconde équation, on obtient :

$$3x - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 4.$$

C'est une équation du premier degré à une seule inconnue x; elle donnera pour x une valeur unique et déterminée et, connaissant cette valeur de x, on obtiendra la valeur de y par la formule déjà écrite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x.$$

Entrons dans le détail des calculs; l'équation en x donne successivement :

$$3x + \frac{4}{5}x = 4 + \frac{2}{5}$$

$$\frac{19}{5}x = \frac{22}{5}$$

$$x = \frac{22}{19},$$

et l'on a ensuite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x = \frac{19 - 44}{5 \times 19} = \frac{-25}{5 \times 19} = \frac{-5}{19}.$$

On déduit de la marche suivie la règle suivante.

RÈGLE. — *Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y par la méthode de substitution, on résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues, y par exemple, comme si l'autre inconnue x était connue; on substitue l'expression obtenue à y, dans l'autre équation, qui devient ainsi une équation à une inconnue x, que l'on sait résoudre. La valeur de x*

ayant été obtenue par la résolution de cette équation, on obtient y en remplaçant x par cette valeur dans l'expression de y.

54. **Cas d'impossibilité et d'indétermination.** — Nous avons ramené la résolution d'un système à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue ; suivant que cette équation sera déterminée, impossible, ou indéterminée, le système lui-même sera déterminé, impossible, ou indéterminé. Nous avons déjà donné un exemple du cas déterminé, c'est-à-dire du cas où la solution existe, et est unique. En voici des cas d'impossibilité et d'indétermination.

Exemple I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15 \\ 6x + 9y = 18. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = \frac{15 - 4x}{6} = \frac{15}{6} - \frac{4}{6}x = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}x.$$

En remplaçant y par cette valeur dans la seconde, on a :

$$6x + 9\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}x\right) = 18$$

$$(6 - 6)x = 18 - \frac{45}{2} = \frac{-9}{2}.$$

Le coefficient de x est égal à zéro et le terme indépendant de x n'est pas nul : *l'équation est impossible* ; le système proposé est donc impossible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de valeurs de x et de y qui le vérifient.

Exemple II. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 6y = 18 \\ 6x + 9y = 27. \end{cases}$$

On tire de la première équation :

$$y = \frac{18 - 4x}{6} = 3 - \frac{2}{3}x$$

et la seconde devient :

$$6x + 9\left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 27$$

$$(6 - 6)x = 27 - 27.$$

Elle se réduit à une identité : le coefficient de x et le terme constant sont tous deux nuls, x est *indéterminé*, c'est-à-dire qu'une valeur quelconque de x vérifie cette équation. On pourra donc choisir x arbitrairement; y sera alors donné par la formule que nous avons obtenue :

$$y = 3 - \frac{2}{3}x.$$

Par exemple, on pourra prendre $x = 3$ et l'on aura $y = 1$; ou bien $x = -3$ et l'on aura $y = 5$, etc.

L'indétermination est ici *simple;* on entend par là qu'*une* inconnue et *une seule* peut être prise arbitrairement, et que l'autre inconnue est alors déterminée, sa valeur dépendant d'ailleurs généralement de la valeur choisie pour la première

55. **Systèmes de plus de deux équations.** — La méthode de substitution s'applique sans modification essentielle à la résolution d'un système de

3, 4, etc., équations à 3, 4, etc., inconnues. Nous allons le montrer sur quelques exemples.

Exemple I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 5x + 8y + 2z = 1 \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$z = \frac{16 - 2x - 3y}{4} = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y.$$

En substituant cette valeur dans les deux autres, on obtient :

$$5x - 8y + 2\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 1$$

$$3x - y - 2\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 5$$

ou, en simplifiant :

$$\begin{cases} 4x - \dfrac{19}{2}y = -7 \\ 4x + \dfrac{1}{2}y = 13. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues.

La première de ces équations donne :

$$y = \frac{-7 - 4x}{-\frac{19}{2}} = \frac{14}{19} + \frac{8}{19}x$$

et la seconde devient alors :

$$4x + \frac{1}{2}\left(\frac{14}{19} + \frac{8}{19}x\right) = 13,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{80}{19}x = \frac{240}{19}$$

d'où :

$$x = 3.$$

On a ensuite :

$$y = \frac{14}{19} + \frac{8}{19}x = \frac{14+24}{19} = 2$$

$$z = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

Le système proposé est donc complètement résolu.

Exemple II. — *Résoudre le système :*

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z + t &= 14 \\ 2y - 4t &= -7 \\ x + z &= 10 \\ z + 2t &= 9. \end{aligned}\right.$$

La première équation donne :

$$t = 14 - x - y - z$$

et, en substituant dans les autres, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} 2y - 4(14 - x - y - z) &= -7 \\ x + z &= 10 \\ z + 2(14 - x - y - z) &= 9, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en simplifiant :

$$\left\{\begin{aligned} 4x + 6y + 4z &= 49 \\ x + z &= 10 \\ -2x - 2y - z &= -19. \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations donne :

$$z = \frac{49 - 4x - 6y}{4} = \frac{49}{4} - x - \frac{3}{2}y$$

d'où, en substituant :

$$\begin{cases} x + \dfrac{49}{4} - x - \dfrac{3}{2}y = 10 \\ -2x - 2y - \left(\dfrac{49}{4} - x - \dfrac{3}{2}y\right) \quad -19, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2}y = -\dfrac{9}{4} \\ -x - \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{27}{4}. \end{cases}$$

La première de ces équations donne :

$$y = \frac{3}{2}.$$

Il se trouve que cette valeur ne renferme pas x; mais cela ne change en rien la méthode; la substitution dans la seconde équation donne :

$$-x - \frac{3}{4} = -\frac{27}{4},$$

c'est-à-dire :

$$-x = -6$$
$$x = 6.$$

Connaissant x et y, on a :

$$z = \frac{49}{4} - x - - y = \frac{49}{4} - 6 - \frac{9}{4} = 4.$$

Connaissant x, y et z, on a :

$$t = 14 - x - y - z = 14 - 6 - \frac{3}{2} - 4 = \frac{5}{2}.$$

Le système est résolu.

Remarque. — On abrège souvent beaucoup les calculs en choisissant convenablement l'équation d'où l'on tire la valeur de l'une des inconnues pour la substituer dans les autres. C'est surtout la pratique des calculs qui guide pour ce choix; d'une manière générale on peut seulement dire que l'on doit s'arranger pour avoir des expressions aussi simples que possible.

Reprenons, par exemple, le système précédent, que nous récrivons :

$$\left\{\begin{array}{ll} x + y + z + t & = 14 \\ 2y - 4t & = -7 \\ x + z & = 10 \\ z + 2t & = 9. \end{array}\right.$$

On remarquera que la troisième expression donne pour z une expression très simple :

$$z = 10 - x.$$

En substituant cette valeur dans les trois autres on obtient :

$$\begin{array}{ll} x + y + (10 - x) + t & = 14 \\ 2y - 4t & = -7 \\ (10 - x) + 2t & = 9, \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} y + \quad t = 4 \\ 2y - 4t = -7 \\ -x + 2t = -1. \end{array}\right.$$

La première de ces équations donne :

$$y = 4 - t,$$

d'où en substituant :

$$\begin{cases} 2(4-t) - 4t = -7 \\ -x + 2t = -1, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -6t = -15 \\ -x + 2t = -1; \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$t = \frac{-15}{-6} = \frac{5}{2}.$$

On obtient ensuite :

$$-x = -1 - 2t = -6$$
$$x = 6$$
$$y = 4 - t = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$
$$z = 10 - x = 10 - 6 = 4.$$

Dans certains cas aussi, il est préférable d'employer la méthode d'élimination par addition que nous exposerons dans un instant

III. DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

56. **Généralités sur les systèmes.** — Rappelons que l'on appelle *système* d'équations l'ensemble de plusieurs équations qui doivent être vérifiés simultanément, c'est-à-dire pour les mêmes *valeurs* des inconnues et *solution* d'un système tout ensemble

de valeurs des diverses inconnues qui vérifient les équations du système. Par exemple, pour le système étudié à la fin du précédent paragraphe, les valeurs :

$$x = -6, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = 4, \quad t = \frac{5}{2},$$

constituent *une solution* de système

On dit que deux systèmes sont *équivalents* lorsqu'ils admettent *les mêmes* solutions. Pour cela il est nécessaire que :

1° Toute solution du premier soit aussi solution du second;

2° Toute solution du second soit aussi solution du premier.

On devra donc avoir soin de démontrer ces deux points pour démontrer l'équivalence de deux systèmes.

Le procédé le plus habituellement employé pour obtenir un système équivalent à un système donné consiste à faire des *combinaisons linéaires* des équations de ce système donné; voici ce que l'on entend par là.

Supposons d'abord que les équations du système proposé, au nombre de trois par exemple, soient écrites de manière que les seconds membres se réduisent à zéro, c'est-à-dire aient la forme :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0, \end{cases}$$

A, B, C désignant certaines expressions algébriques. On appelle *combinaison linéaire* de ces équa-

tions toute équation de la forme :

$$aA + bB + cC = 0,$$

a, b, c désignant des *nombres* quelconques, positifs ou négatifs. Par exemple l'équation :

$$2A - \frac{3}{5}B + \frac{1}{10}C = 0$$

est une combinaison linéaire des équations données; il en est de même de l'équation :

$$10A - \frac{3}{4}C = 0.$$

Dans ce dernier cas nous avons :

$$a = 10 \qquad b = 0 \qquad c = -\frac{3}{4};$$

b étant nul, la combinaison linéaire *ne renferme pas* B. Les nombres a, b, c sont dits les multiplicateurs correspondant aux équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; pour que la combinaison linéaire *renferme effectivement* l'une des équations, B, par exemple, il est nécessaire et suffisant que le multiplicateur correspondant b ne soit pas nul.

Pour former une combinaison linéaire des équations d'un système il n'est pas nécessaire de faire passer tous les termes dans le premier membre, comme nous l'avons supposé. Soient, par exemple, les équations :

$$\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ C = C', \end{cases}$$

dans lesquelles A, B, C, A', B', C' désignent des

expressions algébriques quelconques. On peut les écrire :

$$\begin{cases} A - A' = 0 \\ B - B' = 0 \\ C - C' = 0. \end{cases}$$

Formons la combinaison linéaire suivante :

$$a(A - A') + b(B - B') + (C - C') = 0.$$

Cette équation peut s'écrire aussi :

$$aA + bB + cC = aA' + bB' + cC',$$

et l'on voit qu'elle se déduit des équations données par la règle suivante.

Règle. — *On obtient une combinaison linéaire de plusieurs équations données en formant une nouvelle équation dont le premier membre est égal à la somme des produits des premiers membres des équations données par certaines constantes a, b, c, et dont le second membre est égal à la somme des produits des seconds membres des équations données par les mêmes constantes prises dans le même ordre.*

Dans la pratique il est commode d'écrire les multiplicateurs a, b, c en regard des équations proposées, et aussi de ranger, s'il y a lieu, les termes semblables dans une même colonne verticale.

Exemple. — *Former une combinaison linéaire des équations suivantes :*

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 3z + y = 2 \\ z - x - 3y = -6, \end{cases}$$

On adoptera la disposition suivante :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \quad 2 \\ 4x + y - 3z = 2 & \quad -1 \\ -x - 3y + z = -6 & \quad -2 \end{cases}$$

et l'on obtiendra le coefficient de chaque inconnue dans l'équation combinaison linéaire en faisant la somme des produits obtenus, en multipliant le coefficient de cette inconnue dans chacune des équations par le multiplicateur inscrit en regard. Par exemple, on aura pour x :

$$2 \times 2 + 4 \times (-1) + (-1) \times (-2) = 4 - 4 + 2 = 2,$$

de même, pour y :

$$(-1) \times 2 + 1 \times (-1) + (-3) \times (-2) \\ = -2 - 1 + 6 = 3;$$

pour z :

$$(-3) \times (-1) + 1 \times (-2) = 3 - 2 = 1,$$

et enfin, dans le second membre :

$$5 \times 2 + 2 \times (-1) + (-6) \times (-2) = 10 - 2 + 12 = 20.$$

La combinaison linéaire demandée est donc :

$$2x + 3y + z = 20.$$

Nous donnerons d'autres exemples aux exercices.

57 **Théorème fondamental de la méthode d'élimination par addition.** — Il est clair que toute combinaison linéaire de plusieurs équations est vérifiée pour toutes les valeurs des inconnues qui vérifient ces équations; car si, pour certaines valeurs des inconnues, on a : $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$,

on a aussi : $aA + bB + cC = 0$, quels que soient les nombres a, b, c. Il est donc naturel, pour former un système équivalent à un système donné, d'utiliser les combinaisons linéaires des équations du système proposé. Telle est en effet la méthode communément employée. Mais s'il est clair que tout système composé de combinaisons linéaires admet toutes les solutions du système proposé, la réciproque n'est nullement évidente et, en fait, n'est pas toujours exacte. Nous ne pouvons étudier ici en détail cette importante question; nous nous contenterons d'indiquer un cas très important dans lequel on est assuré de l'équivalence et dont la connaissance nous suffira largement pour les applications que nous avons à traiter.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant donné un système quelconque d'équations, on obtient un système équivalent en remplaçant l'une des équations de ce système par une combinaison linéaire renfermant effectivement cette équation, c'est-à-dire telle que le multiplicateur correspondant à l'équation que l'on remplace soit différent de zéro.*

Par exemple, soit le système :

$$(I) \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème le système suivant lui est équivalent :

$$(II) \qquad \begin{cases} A = 0 \\ aA + bB + cC = 0 \\ C = 0, \end{cases}$$

à condition que l'on suppose *expressément* que b est différent de zéro, c'est-à-dire que la combinaison linéaire par laquelle on a remplacé la seconde équation du système I renferme *effectivement* cette seconde équation [1].

Pour démontrer que le système (II) est équivalent au système (I), il faut montrer d'abord que toute solution de (I) vérifie (II) et ensuite que toute solution de (II) vérifie (I) :

1° Toute solution de (I) vérifie (II); car si A, B, C sont nuls, il en est de même de $aA + bB + cC$;

2° Toute solution de (II) vérifie (I); car si (II) est vérifié A et C sont nuls, ainsi que $aA + bB + cC$; comme A et C sont égaux à zéro, il en est de même de aA et de cC, de sorte que $bB = 0$; et *comme b n'est pas égal à zéro*, il en résulte que $B = 0$; le système (I) est donc vérifié.

Le théorème est donc complètement démontré.

Nous allons l'appliquer à la résolution, puis à la discussion d'un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues.

58. **Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.** — Étant donné un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues, on peut, dans chaque équation de ce système, faire passer les termes inconnus dans le premier membre, les

1. La *nécessité* de cette condition est intuitive; il est clair que si b était nul, il ne subsisterait dans le système (II) aucune trace de la seconde équation du système (I), c'est-à-dire aucune trace des coefficients qui figurent dans B; les solutions de ce système (II)

termes connus dans le second membre et faire ensuite la réduction des termes semblables. Le système prend alors la forme canonique suivante :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

dans laquelle a, b, c, a', b', c', désignent soit des nombres, soit des expressions algébriques composées avec les quantités regardées comme connues.

Nous nous proposons de résoudre le système (A). Nous supposerons d'abord que l'on a :

$$ab' - ba' \neq 0,$$

et nous dirons que nous nous trouvons dans le cas *général;* nous étudierons dans le paragraphe suivant, consacré à la discussion, les cas *particuliers* où l'on a :

$$ab' - ba' = 0.$$

La quantité $ab' - ba'$ s'appelle le *déterminant* du système; elle joue un rôle essentiel dans la *détermination* des solutions de ce système.

Le déterminant $ab' - ba'$ étant supposé différent de zéro, il est clair que les coefficients b et b' ne peuvent pas être nuls *tous les deux;* car si l'on avait :

$$b = 0 \qquad b' = 0,$$

il en résulterait :

$$ab' - ba' = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que b soit différent de zéro (dans le cas où b serait nul, b' serait sûrement différent de zéro et l'on procéderait d'une

manière analogue); nous obtiendrons alors un système équivalent au système proposé en remplaçant la seconde équation de ce système par la combinaison linéaire obtenue en prenant les multiplicateurs b' et $-b$; calculons cette combinaison d'après la règle de la page 94.

$$\begin{array}{ll} ax + by = c & \qquad b' \\ a'x + b'y = c' & \qquad -b \end{array}$$

L'inconnue y disparaît dans la combinaison linéaire, par suite du choix des multiplicateurs; elle se trouve *éliminée;* et l'on obtient l'équation :

$$(ab' - ba')x = cb' - bc',$$

de sorte que le système proposé est équivalent au suivant :

$$(\text{A}') \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ (ab' - ba')x = cb' - bc'. \end{cases}$$

La seconde équation de ce système (A′) ne renferme plus que l'inconnue x; de plus le coefficient de x est précisément le déterminant $ab' - ba'$ que nous avons supposé différent de zéro; cette seconde équation fournit donc pour x *une valeur unique et déterminée*. Si nous substituons cette valeur à la place de x dans la première équation du système (A′), nous obtenons une équation à une inconnue y dans laquelle le coefficient b de y est différent de zéro. Cette équation fournit donc pour y une solution unique et déterminée. Comme le système (A′) est équivalent au système (A), nous pouvons conclure de là que le système (A) admet une solution unique et déterminée, d'où le théorème :

THÉORÈME. — *Lorsque le déterminant $ab' - ba'$ est différent de zéro, le système* (A) *admet une solution unique et déterminée.* Nous verrons, dans la discussion, que la condition énoncée ici comme *suffisante* est aussi *nécessaire*, c'est-à-dire que ce théorème fait connaître le seul cas où la solution du système (A) est *unique* et *déterminée*.

59. **Calcul de la solution.** — Pour calculer la solution dont nous venons de démontrer l'existence, il suffit de résoudre le système (A'); la seconde équation donne :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

et, en substituant cette valeur dans le premier, celle-ci devient :

$$by = c - ax = c - \frac{a(cb' - bc')}{ab' - ba'} = \frac{b(ac' - ca')}{ab' - ba'},$$

d'où, puisque b est différent de zéro :

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

On peut obtenir plus simplement la valeur de y en remarquant que si l'on élimine x entre les équations du système (A), ce qui peut se faire en choisissant comme multiplicateurs $-a'$ et a, on obtient :

$$(-a'b + b'a)y = -ca' + ac'.$$

On pourrait aussi déduire la valeur de y de celle de x en remarquant que le système proposé ne change pas lorsqu'on y permute simultanément x avec y, a avec b et a' avec b'; il suffit de faire ces permutations dans la formule qui donne x pour

obtenir la formule qui donne y [1]. De telles remarques sont fort utiles pour simplifier les discussions. Quoi qu'il en soit de la méthode employée, nous arrivons à la règle suivante.

Règle. — *La solution du système* (A) *est donnée par les formules :*

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \end{aligned}\right.$$

dont le dénominateur commun est le déterminant $ab' - ba'$, *le numérateur de chaque inconnue se déduisant du dénominateur en y remplaçant chaque coefficient de l'inconnue dont il s'agit par le terme connu de la même équation* (c'est-à-dire a par c et a' par c' si l'on cherche x; b par c et b' par c' si l'on cherche y).

Dans les applications, au lieu d'appliquer les formules il est souvent aussi commode d'effectuer directement les calculs d'élimination. On utilise alors la règle suivante

Règle. — *Pour calculer l'inconnue x on forme une combinaison linéaire des équations proposées en prenant comme multiplicateur de la première équation le coefficient de y dans la seconde, et comme multiplicateur de la seconde équation le coefficient changé de signe de y dans la première. On obtient ainsi une équation qui ne contient plus y et d'où*

---

1. Nous avons en effet démontré que la solution est unique et déterminée; donc, quelle que soit la méthode qui conduise à une valeur pour y, nous sommes certains que nous trouvons bien *la*

l'on tire la valeur de x. Pour calculer y on peut, soit utiliser cette valeur de x en la substituant dans l'une des équations proposées, soit procéder directement d'une manière analogue, c'est-à-dire former une combinaison linéaire en prenant pour multiplicateurs le coefficient de x dans la seconde équation et le coefficient changé de signe de x dans la première.

Remarque I. — Il est inutile de s'assurer au préable que le déterminant $ab' - ba'$ n'est pas nul; c'est une conséquence du calcul même, car ce déterminant est égal au coefficient de x (ou de y) dans l'équation résultant de la combinaison linéaire; si ce coefficient est nul, on s'en aperçoit immédiatement en appliquant la règle.

Remarque II. — Il est quelquefois possible de prendre des multiplicateurs plus simples que ceux qu'indique la règle. Dans le cas où les coefficients sont des nombres entiers, on simplifie les calculs en recherchant le p. p. c. m. des valeurs absolues des coefficients de y et en prenant pour multiplicateur de chaque équation le quotient de ce p. p c. m. par le coefficient de y dans cette équation, en ayant soin cependant de changer le signe de *l'un* de ces quotients.

Exemples. I. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Prenons 2 comme multiplicateur de la première équation et 5 comme multiplicateur de la seconde; nous écrivons ces multiplicateurs en regard des

équations :

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y = & 4 & \quad 2 \\ 3x - 2y = & 5 & \quad 5 \\ \hline 19x \quad = & 33 & \end{array}$$

et nous disons 2 fois 2,4 + 3 fois 5,15 = 19 coefficient de x. 2 fois 4,8 + 5 fois 5,25 = 33, terme connu ; nous avons donc :

$$x = \frac{33}{19}.$$

Prenons maintenant les multiplicateurs 3 et — 2 :

$$\begin{array}{rcl} 2x + \quad 5y = 4 & & \quad 3 \\ 3x - \quad 2y = 5 & & \quad -2 \\ \hline 19y = 2 & & \end{array}$$

un calcul analogue donne :

$$y = \frac{2}{19}.$$

L'élève vérifiera que les valeurs obtenues pour x et y donnent bien une solution du système.

II — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = 7. \end{cases}$$

Les coefficients 6 et 9 de y n'étant pas premiers entre eux, leur p. p. c. m. 18 est inférieur à leur produit ; il y a donc avantage à prendre pour multiplicateurs 3 et — 2 ; pour éliminer x, on prendra ensuite pour multiplicateurs — 1 et 2. Pour éviter de récrire trop souvent les équations on peut adopter

la disposition suivante :

$$\begin{array}{rcr} 3 & \quad 4x+6y=\ 9 \quad & -1 \\ -2 & \quad 2x+9y=\ 7 \quad & 2 \\ \hline & 8x \qquad =13 & \\ & 12y \qquad =\ 5 & \end{array}$$

On a écrit à gauche les multiplicateurs qui fournissent l'équation ne renfermant plus que x et à droite les multiplicateurs qui fournissent l'équation ne renfermant plus que y; on a successivement :

$$3\times4-2\times2=\ 12-\ 4=\ 8$$
$$3\times9-2\times7=\ 27-14=13$$
$$(-1)\times6+2\times9=-6+18=12$$
$$(-1)\times9+2\times7=-9+14=5.$$

On obtient ainsi la solution :

$$x=\frac{13}{8} \qquad y=\frac{5}{12}.$$

L'élève vérifiera que ces valeurs satisfont aux équations proposées.

III. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} ax+\ by=c \\ a^2x+b^2y=c^2. \end{cases}$$

Pour éliminer y il suffit de prendre les multiplicateurs b et -1 et pour éliminer x, les multiplicateurs $-a$ et 1; on adoptera la disposition suivante :

$$\begin{array}{rcr} b & \quad ax+by=c \quad & -a \\ -1 & \quad a^2x+b^2y=c^2 \quad & 1 \\ \hline & (ab-a^2)\ \ x=bc-c^2 & \\ & (-ab+b^2)\,y=-ac+c^2 & \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c(b-c)}{a(b-a} \\ y = \dfrac{c(c-a)}{b(b-a)}. \end{cases}$$

Telle est la solution du système proposé sous la réserve que les facteurs a, b, $b-a$ par lesquels on a divisé ne sont pas nuls ; s'ils étaient nuls, il y aurait lieu de *discuter*, comme nous l'expliquerons dans un instant.

IV. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2. \end{cases}$$

Pour éliminer y on peut adopter les multiplicateurs 1 et b et pour éliminer x les multiplicateurs 1 et $-a$; on obtient ainsi :

$$x\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1 + 2b$$

$$y\left(1 + \frac{a}{b}\right) = 1 - 2a,$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a(1+2b)}{a+b} \\ y = \dfrac{b(1-2a)}{a+b}, \end{cases}$$

sous la réserve que le diviseur $a + b$ n'est pas nul.

60. **Cas où le déterminant est nul. Discussion.**

— Reprenons le système général :

$$(A) \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Nous avons vu que lorsque le déterminant $ab' - ba'$ n'est pas nul, ce système admet une solution unique et déterminée; nous allons maintenant étudier ce qui se passe lorsque l'on suppose :

$$(1) \qquad ab' - ba' = 0.$$

Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — *Les coefficients a, b, a', b' ne sont pas tous nuls* Nous supposerons alors, pour fixer les idées, que l'on a :

$$(2) \qquad a \neq 0.$$

On ferait des raisonnements et des calculs tout à fait analogues dans le cas où ce serait a', ou b, ou b' qui serait différent de zéro. (Bien entendu, il peut arriver, et il arrive le plus souvent, qu'aucun des 4 coefficients n'est nul; on peut alors raisonner en partant de l'un quelconque d'entre eux comme nous raisonnons en partant de a).

Le coefficient a n'étant pas nul, nous pouvons remplacer la seconde équation du système par la combinaison linéaire obtenue au moyen des multiplicateurs $-a'$ et a; nous obtenons ainsi le système équivalent au système (A) :

$$(B) \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ (ab' - ba')y = ac' - ca'. \end{cases}$$

Mais par hypothèse $ab' - ba' = 0$; donc si l'on a :

$$(3) \qquad ac' - ca' \neq 0,$$

la seconde équation de ce système (B) est impossible, c'est-à-dire n'est vérifiée pour aucune valeur de y; le système (B) est donc lui-même impossible et il en est de même du système équivalent (A). Les hypothèses (1), (2) et (3) entraînent donc l'*impossibilité*. Supposons maintenant que l'on ait :

$$(4) \qquad ac' - ca' = 0.$$

La seconde des équations du système (B) est alors indéterminée; *elle est vérifiée quel que soit y*.

Prenons donc pour y une valeur quelconque que nous désignerons par y_0; c'est-à-dire posons :

$$y = y_0.$$

La première des équations du système (B) devient :

$$ax + by_0 = c,$$

et comme a est différent de zéro, elle donne :

$$x = \frac{c - by_0}{a}.$$

Le système proposé admet donc la solution suivante :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c - by_0}{a} \\ y = y_0 \end{cases}$$

quel que soit y_0; il est *indéterminé*, de telle manière que l'une des inconnues, à savoir y, peut être choisie *arbitrairement*; et, lorsqu'elle est choisie, l'inconnue x est déterminée. On remarquera que l'inconnue qui peut être choisie arbitrairement est y, alors que l'on a fait l'hypothèse (2), c'est-

à-dire que l'on a supposé différent de zéro un coefficient a de x. Si l'un des coefficients de y est différent de zéro, on peut de même prendre x arbitrairement et y est alors déterminé *en fonction* de x. L'indétermination qui se présente ici, comme conséquence des hypothèses (1), (2), (4), est dite *simple,* parce que l'*une* des inconnues seulement peut être choisie arbitrairement et que l'autre est alors déterminée.

Remarque. — Si l'on supposait :

$$(2)' \qquad b \neq 0,$$

on trouverait de même en éliminant y que le système est impossible si l'on a :

$$(3)' \qquad bc' - cb' \neq 0,$$

et indéterminé si l'on a :

$$(4)' \qquad bc' - cb' = 0.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que l'on *doit* nécessairement arriver à la même conclusion quelle que soit l'inconnue qu'on élimine. Effectivement dans les hypothèses (1), (2) et (2)' la relation (3) entraîne (3)' et réciproquement, ou, ce qui revient au même, la relation (4) entraîne (4)' et réciproquement.

En effet, a et b étant différents de zéro, la relation (1) peut s'écrire :

$$(5) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

D'autre part, si la relation (4) est vérifiée, ou bien l'on a $c = c' = 0$ et la relation (4') est aussi vérifiée; ou bien, si c' n'est pas nul, c ne peut pas être nul, car ac' n'est pas nul puisque a n'est pas nul, donc $a'c$ ne peut pas être nul; on a donc $c \neq 0$ et la relation (4) donne :

$$(6) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}.$$

En rapprochant cette relation de (5) on obtient :

$$(7) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

d'où l'on déduit la relation (4)'. La relation (7) exprime que les deux équations proposées ont leurs coefficients proportionnels.

Dès lors toute solution de l'une est nécessairement solution de l'autre.

Second cas. — *Les coefficients des inconnues sont tous nuls*. On a, par hypothèse :

$$a = 0 \qquad a' = 0 \qquad b = 0 \qquad b' = 0.$$

Il est clair alors que si c et c' ne sont pas tous deux nuls, les équations proposées ne peuvent jamais être vérifiées toutes deux, quels que soient x et y, puisque les premiers membres se réduisent toujours à zéro et que l'un au moins des seconds membres n'est pas nul Si l'on a :

$$c = 0 \qquad c' = 0$$

les équations proposées sont vérifiées *quels que soient x et y;* l'indétermination est *double*, car les *deux* inconnues peuvent être prises arbitrairement.

61. **Résumé de la discussion.** — La discussion peut être résumée dans le tableau de la page suivante.

Nous donnerons dans le chapitre suivant, à l'occasion des problèmes du premier degré, des exemples de discussion de systèmes, développés ou à traiter comme exercices; la théorie précédente sera ainsi éclairée par des exemples concrets.

DISCUSSION DU SYSTÈME

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

HYPOTHÈSES		RÉSULTAT	FORMULES
$ab' - ba' \neq 0$		solution unique et déterminée.	$x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ $y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$
$ab' - ba' = 0$ $a \neq 0$	$ac' - ca' \neq 0$	système impossible.	
	$ac' - ca' = 0$	indétermination simple.	$x = \dfrac{c - by_0}{a}$ $y = y_0$
$a = 0$ $a' = 0$ $b = 0$ $b' = 0$	c et c' ne sont pas nuls tous deux.	système impossible.	
	$c = 0 \quad c' = 0$	indétermination double.	$x = x_0$ $y = y_0$

Dans ce tableau x_0 et y_0 désignent des nombres quelconques, que l'on peut choisir arbitrairement. Dans le cas où $ab' - ba' = 0$, si au lieu de supposer $a \neq 0$ on supposait, par exemple, $b' \neq 0$, et $bc' - cb' = 0$, les formules seraient remplacées par les suivantes :

$$x = x_0$$
$$y = \frac{c' - a'x_0}{b'}.$$

IV. INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ

62. **Inégalités numériques**. — On appelle *inégalité* une formule par laquelle on exprime que, de deux quantités, l'une est supérieure à l'autre ; ainsi, si l'on veut exprimer que 4 est supérieur à 3, ou est plus grand que 3, on écrit :

$$4 > 3,$$

que l'on énonce 4 *supérieur à* 3. On peut écrire aussi :

$$3 < 4,$$

que l'on énonce 3 *inférieur à* 4. Ces deux inégalités sont dites *de sens différents*. On voit que *l'on peut permuter les deux membres d'une inégalité, à condition d'en changer le sens.*

Rappelons que tout nombre négatif est inférieur à zéro, et que, de deux nombres négatifs, le plus grand en valeur absolue est inférieur à l'autre.

On a, par exemple :

$$-4 < -3$$
$$-2 < 0$$
$$-5 < 1.$$

D'ailleurs, par définition (n° 18), l'inégalité

$$a > b$$

signifie que la différence $a - b$ est positive, ce que l'on écrit :

$$a - b > 0.$$

Désignons par c un nombre quelconque; l'on a :

$$a + c - (b + c) = a - b.$$

Donc, si $a - b$ est positif, il en est de même de $a + c - (b + c)$, c'est-à-dire que, si l'on a :

$$a > b,$$

on a aussi :

$$a + c > b + c;$$

de même, si l'on a :

$$a < b,$$

on a aussi :

$$a + c < b + c$$
$$a - c < b - c.$$

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème I. — *On ne modifie pas le sens d'une inégalité en ajoutant ou retranchant un même nombre à ses deux membres.*

Par exemple, l'on a :

$$-4 < -3,$$

l'on a aussi :

$$-4 + 12 < -3 + 12$$
$$-4 - 15 < -3 - 15,$$

c'est-à-dire :

$$8 < 9$$
$$-19 < -18.$$

Théorème II. — *On ne modifie pas le sens d'une inégalité en multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre* POSITIF ; *on modifie ce sens en*

multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre NÉGATIF.

Par exemple, on a :

$$2 < 4$$

en multipliant les deux membres par 3, on obtient :

$$6 < 12$$

et en les divisant par 8 :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

inégalités de même sens que la proposée. Au contraire, en multipliant les deux membres par -2, on obtient :

$$-4 > -8,$$

et en divisant par -2 :

$$-1 > -2,$$

inégalités de sens contraire à la proposée.

Pour démontrer le théorème II il suffit d'observer que le produit d'un nombre par un nombre positif est du même signe que le multiplicande, tandis que le produit d'un nombre par un nombre négatif est de signe contraire à celui du multiplicande ; si donc on a :

$$a > b,$$

c'est-à-dire :

$$a - b > 0,$$

et si c est positif, on a aussi :

$$(a - b)c > 0,$$

c'est-à-dire :

$$ac - bc > 0$$
$$ac > bc,$$

tandis que si c est négatif, on a

$$(a - b)c < 0$$
$$ac - bc < 0$$
$$ac < bc.$$

La démonstration est la même dans le cas de la division.

63. **Inégalités du premier degré.** — On appelle inégalité du premier degré une inégalité dans laquelle figure, outre les quantités connues, une inconnue (ou variable) x *au premier degré*[1]. Par exemple, l'inégalité :

$$3x - 7 - 5x > \frac{3}{2}x - 9$$

est une inégalité de premier degré en x. Résoudre une inégalité, c'est déterminer pour quelles valeurs de x elle est satisfaite. Les inégalités du premier degré à une inconnue se résolvent par une marche tout à fait semblable à celle que nous avons indiquée pour les équations; il faut seulement avoir grand soin de changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre *négatif*.

1. Il serait plus correct d'employer, concurremment avec le mot *inégalité*, les termes *inéquation* et *inidentité*, de même qu'on emploie, concurremment avec *égalité*, les termes *équation* et *identité*. Nous nous conformons à l'usage le plus répandu, ce qui n'a pas d'inconvénient grave dans les questions élémentaires que nous traitons.

Soit, par exemple, à résoudre l'inégalité :

$$3x - 5 > 5x + 8.$$

En faisant passer les termes renfermant x dans le premier membre et les autres dans le second membre, elle devient :

$$-2x > 13,$$

d'où en divisant par -2 :

$$x < \frac{-13}{2}.$$

On a changé le sens, puisque -2 est négatif.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

60. — Résoudre les équations :

$$2x + 5 = 5x - 4$$

$$\frac{5}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 7$$

$$\frac{2x-6}{7} + \frac{3x-4}{4} = \frac{5x-9}{28}$$

$$\frac{2x-1}{7} + 10x - 3 = 0$$

$$\frac{15}{16}x - 2(1 - 2x) + 3(1 - 4x) = \frac{3}{5}.$$

Les équations qui renferment des dénominateurs devront être résolues de deux manières : en chassant et sans chasser les dénominateurs.

61. — Résoudre les équations :

$$ax + b = cx + d$$

$$(a - bx)c = (a + bx)d$$

$$\frac{a+bx}{c}=\frac{c+dx}{a}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

$$\frac{ax-b}{cx-d}=\frac{ax-b'}{cx-d'}.$$

62. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

63. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x-y=\frac{3}{5} \\ x+y=\frac{5}{7}. \end{cases}$$

64. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x+\frac{5}{6}y=1 \\ \frac{5}{6}x-\frac{3}{4}y=2. \end{cases}$$

65. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4) \\ x+y \quad 1. \end{cases}$$

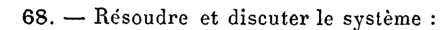
66. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x-y=3\left(x-5+\frac{2}{3}y\right) \\ 5x+y=\frac{3}{4}(2+x-y). \end{cases}$$

Ces systèmes doivent être résolus de deux manières : par substitution et par la méthode des combinaisons linéaires.

67. — Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax-by=d. \end{cases}$$



68. — Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = d. \end{cases}$$

69. — Résoudre et discuter le système :

$$\begin{aligned} ax \;-\; by \;&= c \\ ax^2 - b^2y &= c^2. \end{aligned}$$

70. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (1+\lambda)\,x + (3+\lambda)\,y = 3+\lambda \\ \qquad\;\; \lambda\,x + (5+\lambda)\,y = 4+\lambda. \end{cases}$$

Discuter la solution obtenue suivant les valeurs de λ.

71. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a+\lambda)\,x + (b+\lambda)\,y = c+\lambda \\ (a'+\lambda)\,x + (b'+\lambda)\,y = c'+\lambda. \end{cases}$$

Discuter la solution obtenue suivant les valeurs de λ.

72. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - 3z = 12. \end{cases}$$

73. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y + 2z = \dfrac{3}{4} \\ x + y + z = 0 \\ x - y - 4z = 2. \end{cases}$$

74. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 3y - z - t = 3 \\ x - y + z + t = \dfrac{2}{3} \\ x - \dfrac{1}{2}\,y - z = 6 \end{cases}$$

75. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} y+z+t=a \\ z+t+x=b \\ t+x+y=c \\ x+y+z=d. \end{cases}$$

Généraliser.

76. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ a^2x+b^2y+c^2z=m^2. \end{cases}$$

Généraliser.

77. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} bz-cy=\alpha \\ cz-az=\beta \\ ay-bx=\gamma. \end{cases}$$

On montrera qu'il est impossible en général et indéterminé si la somme $a\alpha+b\beta+c\gamma$ est nulle.

78. — Résoudre le système :

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=ax+by+cz.$$

79. — Résoudre les inégalités :

$$3x-3>5x-5$$
$$4x-8>8x-3$$
$$\frac{2}{3}x-3>2x+\frac{3}{7}$$
$$-\frac{1}{4}x>5x-\frac{5}{7}$$

80. — Peut-on déterminer λ de manière que le système :

$$(\lambda+3)x+(\lambda+2)y=2\lambda+1$$
$$(\lambda+8)x+(\lambda+6)y=2\lambda+6$$

soit indéterminé ? Ayant ainsi déterminé λ, comment doit-on choisir x pour que y soit positif ?

81. — Résoudre les inégalités :

$$ax - b > cx - d$$
$$\frac{a - bx}{c} > \frac{c - bx}{a}.$$

82. — Résoudre le système :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d''. \end{aligned}$$

83. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} a^3x + b^3y = c^3 \\ a^5x + b^5y = c^5. \end{cases}$$

84. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda\left(1 + \frac{z}{c}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{z}{c}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu\left(1 - \frac{z}{c}\right). \end{cases}$$

Montrer que la solution de ce système vérifie aussi l'équation :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{z}{c}\right).$$

85. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda\left(1 + \frac{z}{c}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{z}{c}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda'\left(1 + \frac{z}{c}\right) \end{cases}$$

et montrer que la solution *ne vérifie pas* l'équation :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda'}\left(1 - \frac{z}{c}\right).$$

CHAPITRE IV

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

I. GÉNÉRALITÉS

64. — La résolution d'un problème par l'algèbre peut se subdiviser en 4 parties :

1° Choix des inconnues;

2° Mise en équations;

3° Résolution et discussion des équations;

4° Discussion du problème.

Nous avons étudié la 3ième partie dans le chapitre précédent; nous allons dire quelques mots des autres; ces généralités seront d'ailleurs surtout éclaircies par les exemples.

65. **Choix des inconnues.** — Lorsque l'on veut résoudre un problème par l'algèbre, la première question que l'on doit se poser est relative au choix des inconnues. Elle se subdivise en plusieurs parties :

1° Quelles quantités prend-on comme inconnues?

2° Comment sont-elles définies en valeur absolue?

3° Comment sont-elles définies en signe?

Examinons successivement ces trois points.

1° Dans les questions élémentaires, l'énoncé indique généralement d'une manière assez claire par elle-même quelles inconnues il faut choisir; c'est surtout l'étude de nombreux exemples qui peut servir de guide pour choisir, dans certains cas, certaines inconnues de préférence à d'autres : il en résulte parfois des simplifications assez grandes.

2° Les quantités que l'on prend pour inconnues étant déterminées, il est essentiel de définir d'une manière précise de quelle manière on les représente par des nombres, puisque ce sont des nombres seulement qui figurent dans les formules de l'algèbre. Pour cela, il faut fixer d'une manière précise l'*unité* que l'on choisit; lorsqu'on aura trouvé la solution, qui sera un certain nombre, on devra se rappeler quelle unité a été choisie afin de connaître la signification de ce nombre. De plus, dans certains cas, il est nécessaire de fixer une *origine;* si l'inconnue est *un temps*, par exemple.

3° Dans bien des problèmes, les quantités inconnues sont de nature telle qu'on peut les considérer comme positives ou négatives; il est donc nécessaire, en même temps qu'on choisit une unité, de faire une convention précise relative au *signe* de chacune de ces quantités. On devra se rappeler cette convention, lorsqu'on aura obtenu la solution, de manière à en connaître la signification concrète précise.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Jean a 3 ans 6 mois et Pierre 18 mois; peut-il arriver que l'âge de Jean soit double de celui de Pierre? Il est assez naturel de prendre pour inconnue le temps qui sépare le moment actuel de l'époque

où l'âge de Jean sera (ou a été) double de celui de Pierre. On prend donc comme origine des temps l'époque actuelle. De plus, on devra choisir une unité de temps ; on prendra, soit le mois, soit l'année. Enfin, on devra indiquer si l'on compte les temps comme positifs vers le futur et négatifs vers le passé, ou inversement. On aura alors fait les conventions nécessaires pour pouvoir mettre le problème en équation et, cette équation résolue, discuter le résultat.

66. **Mise en équations.** — Mettre un problème en équations, c'est traduire algébriquement par des équations toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les inconnues, d'après l'énoncé. Ces conditions s'expriment par des relations entre les inconnues et les quantités données ; il faut avoir grand soin, avant d'écrire ces relations, d'exprimer toutes les quantités de même nature avec la même unité et, s'il y a lieu, avec la même *origine* et les mêmes *conventions de signe*. Faute de prendre cette précaution essentielle, les équations écrites ne signifieraient rien et on ferait des erreurs très graves.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Deux voyageurs se déplacent sur la route de Paris à Lyon ; ils sont tous deux entre Paris et Lyon, le premier est à 35^{km} de Paris et le second à 30^{km} de Lyon ; le premier se dirige vers Lyon avec une vitesse de 20^{km} à l'heure et le second se dirige vers Paris avec une vitesse de 4^{m} à la seconde ; on demande au bout de combien de temps ils se rencontreront, sachant que la distance de Paris à Lyon est de 500^{km}.

Nous prendrons comme inconnue le temps x qui

s'écoule depuis l'époque actuelle jusqu'au moment de la rencontre ; ce temps sera supposé compté positivement vers l'avenir et exprimé en *heures* : nous avons ainsi choisi une origine des temps, un sens positif pour les temps, et une unité de temps. Mais notre énoncé renferme aussi des longueurs ; nous choisirons une origine des longueurs, par exemple Paris, un sens positif, par exemple le sens de Paris vers Lyon, et une unité de longueur, par exemple le kilomètre. Avec ces unités la position du premier voyageur est définie par le nombre $+35$ et sa vitesse est $+20$; quant au second voyageur, sa position est définie par $500-30=470$ puisque Lyon est à 500^{km} de Paris et qu'il est à 30^{km} de Lyon vers Paris ; quant à sa vitesse, il faut remarquer que s'il parcourt 4^{m} en une seconde, il parcourt en une minute 4×60 et en une heure $4\times 60\times 60=14\,400$ mètres, c'est-à-dire $14^{\text{km}},4$; de plus, il se dirige de Lyon vers Paris, c'est-à-dire dans le sens négatif ; sa vitesse est donc $-14,4$ avec les unités de longueur et de temps que nous avons choisies.

Ces calculs préliminaires faits, la mise en équation est immédiate ; il suffit d'écrire qu'au bout du temps x les deux voyageurs sont au même point, c'est-à-dire que leurs distances à Paris sont égales ; or, d'après l'équation du mouvement uniforme, la distance du premier voyageur à Paris au bout du temps x est $35+20x$ et la distance du second $470-14,4x$; *l'équation du problème est donc :*

$$35+20x=470-14,4x.$$

67. **Discussion des résultats.** — La résolution

de l'équation ou *des* équations d'un problème est *déterminée*, *impossible* ou *indéterminée;* l'indétermination peut être simple, ou double, etc.; dans le cas où les équations sont déterminées, elles conduisent à des nombres qui peuvent être *positifs* ou *négatifs*, *entiers* ou *fractionnaires*, etc. Discuter le problème, *c'est examiner quelles conséquences on peut déduire de ces diverses circonstances au point de vue de la solution du problème.*

Par exemple, supposons que la lettre x représente le nombre d'hommes présents dans une assemblée et que nous ayons trouvé $x = \frac{3}{4}$, ou bien $x = -12$; nous devrons en conclure que, si nous n'avons pas fait d'erreur de calcul, le problème proposé est *impossible.*

Nous montrerons sur des exemples comment on discute un problème; cette discussion est généralement très aisée dans le cas où les données sont numériques; elle est souvent plus longue lorsque ces données, ou quelques-unes d'entre elles, sont représentées par des lettres dont la valeur numérique n'est pas connue. Pour faire une discussion complète, il est alors nécessaire d'examiner successivement les diverses hypothèses que l'on peut faire sur le signe et la grandeur relative des données. Tout cela sera rendu plus clair par l'étude des exemples.

II. PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

68. **Définition.** — On dit qu'un problème est un problème du premier degré à une inconnue

lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

Il importe d'observer que cette définition est moins précise qu'elle ne le paraît. Lorsqu'on donne un problème, en effet, le nombre des inconnues qu'il faut introduire pour le résoudre dépend parfois en partie de la méthode que l'on suit Par exemple, soit le problème suivant :

Paul a 3 boules de plus que Pierre; mais si Pierre avait deux fois plus de boules, il en aurait 5 de plus que Paul, combien Pierre et Paul ont-ils de boules ?

On peut appeler x le nombre de boules de Pierre et y le nombre de boules de Paul, ce qui fait deux inconnues; on peut aussi remarquer que, si l'on appelle x le nombre des boules de Pierre, l'énoncé nous apprend immédiatement que le nombre de celles de Paul est $x+3$; il est donc possible de n'introduire qu'une inconnue.

Une remarque analogue peut être faite pour le degré. Soit, par exemple, le problème suivant :

Trouver un nombre positif sachant que son carré augmenté de 9 est égal au double de son carré diminué de 7.

Si l'on désigne ce nombre par x, on a l'équation :

$$x^2+9=2x^2-7,$$

qui est du second degré. Mais on peut prendre pour inconnue le carré du nombre cherché; si l'on désigne ce carré par y, on a l'équation du premier degré :

$$y+9=2y-7,$$

qui donne de suite $y = 16$; le nombre cherché a donc 16 pour carré : il est égal à 4.

69. **Exemples de problèmes du premier degré à une inconnue.** Problème I. — *Une fermière porte au marché un certain nombre d'œufs, qu'elle compte vendre 10 centimes pièce; elle en casse 6, mais elle trouve à vendre les autres 15 centimes pièce et rapporte ainsi chez elle 1^fr de plus qu'elle ne comptait en partant. Combien avait-elle d'œufs?*

Désignons par x le nombre d'œufs qu'elle avait au départ; la somme que la fermière comptait rapporter chez elle sera désignée par $10x$, si nous choisissons le centime comme unité. L'énoncé nous apprend qu'elle vend $x - 6$ œufs à 15 centimes, ce qui lui rapporte $(x - 6)15$ et qu'elle obtient ainsi 1^fr, c'est-à-dire 100 centimes de plus qu'elle ne comptait; l'équation du problème est donc :

$$(x - 6)15 = 10x + 100.$$

On en conclut :

$$5x = 190$$
$$x = 38.$$

La réponse est donc : la fermière avait au départ 38 œufs. Il n'y a pas de discussion, cette solution convenant parfaitement à la question posée. Il est bon de vérifier le résultat; s'il ne satisfaisait pas aux conditions du problème, on devrait en conclure que l'on a fait quelque erreur et chercher à la découvrir.

On voit que 38 œufs à 10 centimes donnent 3^fr,80 ; si l'on a 6 œufs de moins, c'est-à-dire 32, mais qu'on

les vende 15 centimes, on obtient $4^{fr},80$; c'est bien 1^{fr} de plus; le résultat trouvé est donc exact.

PROBLÈME II. — *Un marchand de vin désire obtenir 100 litres de vin lui revenant à $0^{fr},50$ le litre en mélangeant du vin qui lui coûte $0^{fr},35$ le litre avec du vin qui lui coûte $0^{fr},95$ le litre. Combien doit-il prendre de vin de chaque espèce?*

Désignons par x le nombre de litres de vin à 0,35; puisqu'il faut 100 litres en tout, le nombre de litres de vin à 0,95 est $100 - x$. Le prix total de revient des x litres à 0,35 et des $100 - x$ litres à 0,95 doit être égal au prix de 100 litres à 0,50, c'est-à-dire à 50^{fr}. On a donc l'équation :

$$0,35x + 0,95\,(100 - x) = 50,$$

dans laquelle on a eu soin d'exprimer toutes les valeurs en francs.

En réduisant, on obtient :

$$-\,0,60x = 50 - 95 = -\,45,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{-\,45}{-\,0,60} = \frac{450}{6} = 75.$$

Il faut donc prendre 75 litres à $0^{fr},35$ et, par suite, 25 litres à $0^{fr},95$.

Nous laissons à l'élève le soin de vérifier ce résultat.

PROBLÈME III. — *Un voleur s'est emparé d'une bicyclette et s'enfuit sur une route avec une vitesse de 20^{km} à l'heure; on s'en aperçoit 3 minutes après son départ et un bicycliste s'élance à sa poursuite*

avec une vitesse de 22km à l'heure. Au bout de combien de temps le rattrapera-t-il?

Désignons par x le temps cherché, exprimé en minutes, et compté à partir du moment où le voleur est parti; lorsque le bicycliste le rattrape, ils ont parcouru le même chemin, le premier ayant roulé pendant x minutes avec une vitesse de 20 à l'heure et le deuxième ayant roulé pendant $x-3$ minutes avec une vitesse de 22 à l'heure. Comme le chemin parcouru pendant une minute est 60 fois plus petit que le chemin parcouru pendant une heure, l'équation du problème sera :

$$\frac{20}{60}x = \frac{22}{60}(x-3),$$

ou, en multipliant les deux membres par 30:

$$10x = 11(x-3),$$

d'où :

$$x = 33.$$

Le voleur est rattrapé 33 minutes après son départ. L'élève vérifiera ce résultat.

Problème IV. — *Un père a 40 ans et son fils en a 16; quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils?*

Désignons par x le temps cherché, compté en années à partir de l'époque actuelle, et supposé positif dans l'avenir. A l'époque x, l'âge du père sera $40 + x$ et l'âge du fils $16 + x$; on doit donc avoir, d'après l'énoncé :

$$40 + x = 3(16 + x),$$

c'est-à-dire :

$$-2x = 8$$
$$x = -4.$$

Discussion. — Nous trouvons comme solution un nombre négatif; or nous avons désigné par x un temps compté positivement dans l'avenir; nous devons en conclure que c'est *il y a 4 ans* que l'âge du père *était* triple de celui du fils. En effet, le père avait alors trente-six ans et le fils douze.

Problème V. — *L'âge de Paul est représenté par a et l'âge de Jacques par b; dans combien d'années l'âge de Paul sera-t-il m fois plus grand que celui de Jacques?*

Dans cet énoncé a, b, m désignent des nombres quelconques; a et b sont supposés désigner des années.

Mettons le problème en équations, en suivant la même marche que pour le précédent. Au bout de x années, l'âge de Paul sera $a + x$ et l'âge de Jacques sera $b + x$; on doit donc avoir :

$$a + x = m(b + x)$$

ou bien :

$$(m - 1)x = a - mb,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{a - mb}{m - 1}.$$

Au bout du temps x l'âge de Paul est :

$$a + x = a + \frac{a - mb}{m - 1} = \frac{m(a - b)}{m - 1}$$

et l'âge de Jacques est :

$$b+x=b+\frac{a-mb}{m-1}=\frac{a-b}{m-1}.$$

L'âge de Paul est donc bien égal à l'âge de Jacques, multiplié par m.

Discussion. — Pour que la solution x convienne au problème, il faut d'abord qu'elle existe; de plus il est nécessaire que les valeurs trouvées pour les âges de Paul et de Jacques soient positives.

Pour que la solution x existe, il faut que $m-1$ ne soit pas nul. Si $m=1$ et $a-mb\neq 0$, c'est-à-dire $a-b\neq 0$, le problème est impossible. On pouvait le prévoir, car si Paul et Jacques n'ont pas le même âge et si l'on demande à quelle époque ils auront le même âge, le problème est évidemment impossible. Nous avons dit que cette impossibilité se représentait par le symbole ∞ ; on peut interpréter ce symbole en remarquant qu'au bout d'un temps très long, leurs âges ne deviennent pas égaux, mais que cependant leur différence relative diminue; si au lieu de deux personnes, dont la vie est très courte, nous considérons deux fossiles, dont l'un remonterait à cent millions d'années, et l'autre à cent millions d'années plus deux jours, on s'accordera pour dire, en langage ordinaire, qu'ils ont le même âge. Ce n'est pas rigoureusement exact, mais c'est d'autant moins inexact que cet âge est plus grand : telle est la signification de la solution ∞ que l'on trouve.

Si m était égal à 1, et en même temps a égal à b, l'équation serait indéterminée, et le problème aussi. Paul et Jacques ont actuellement le même âge; à

quel moment auront-ils encore le même âge? A un moment quelconque, telle est évidemment la réponse.

Écartons maintenant le cas où m serait égal à 1; nous aurons à étudier successivement le cas où m est plus grand que 1 et le cas où m est plus petit que 1.

Si m est plus grand que 1, $m - 1$ est positif; pour que les valeurs obtenues pour les âges de Paul et de Jacques soient positives, il faut et il suffit que $a - b$ soit positif, c'est-à-dire que a soit plus grand que b. Quant à la valeur de x, elle est positive ou négative suivant que $a - mb$ est positif ou négatif; c'est-à-dire suivant que a est supérieur ou inférieur à mb. On peut traduire ainsi ces résultats en langage ordinaire : pour qu'il puisse arriver que l'âge de Paul soit m fois plus grand que l'âge de Jacques, m étant plus grand que 1, il est nécessaire que Paul soit plus âgé que Jacques; dans ce cas, suivant que l'âge de Paul est actuellement supérieur ou inférieur à m fois l'âge de Jacques, l'époque que l'on cherche sera future ou passée.

Si $a = b$, on trouve pour les âges de Paul et de Jacques 0; lorsque leur âge à tous deux était nul, on peut dire algébriquement que l'un d'eux était m fois plus âgé que l'autre, quel que soit m; mais cette solution ne présente aucun intérêt; on exprime quelquefois ce fait en disant qu'elle est *illusoire*.

On étudierait de la même manière le cas où m est inférieur à 1; mais on peut s'en dispenser, si l'on fait la remarque suivante : dire que l'âge de Paul doit être la moitié ou les $\frac{3}{4}$ de celui de Jacques,

c'est dire que l'âge de Jacques doit être le double ou les $\frac{4}{3}$ de celui de Paul. Donc si m est inférieur à 1, il suffira de permuter dans l'énoncé les noms de Paul et de Jacques et de remplacer m par $\frac{1}{m}$ pour être ramené au cas déjà traité où m est supérieur à 1. Il est très important de s'habituer à faire des remarques de ce genre, qui souvent abrègent et simplifient beaucoup les discussions.

On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

HYPOTHÈSES SUR m	HYPOTHÈSES SUR a ET b	CONCLUSIONS
$m = 1$	$a \neq b$	Problème impossible.
	$a = b$	indéterminé.
$m > 1$	$a < b$	impossible.
	$a = b$	solution illusoire.
	$b < a < mb$	$x < 0$; 1 sol. dans le passé.
	$a = mb$	$x = 0$; 1 sol. au moment présent.
	$a > mb$	$x > 0$; 1 sol. dans l'avenir.
$m < 1$	$a > b$	impossible.
	$a = b$	solution illusoire.
	$mb < a < b$	$x < 0$; 1 sol. dans le passé.
	$a = mb$	$x = 0$; 1 sol. au moment présent.
	$a < mb$	$x > 0$; 1 sol. dans l'avenir.

III. PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

70. **Définition et remarques générales.** — On dit qu'un problème est du premier degré à plusieurs inconnues lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues. Cette définition appelle des remarques analogues à celles que nous avons faites au nº 68. Le nombre des inconnues et le degré des équations dépendent parfois de la marche suivie pour la mise en équation; ils sont donc en partie arbitraires, de sorte que la définition ne doit pas être considérée comme absolument précise. En pratique cependant, il arrive, le plus souvent, que le nombre des inconnues et le degré des équations résultent immédiatement de l'énoncé.

Pour la mise en équations il y a lieu d'observer que, si le problème proposé est déterminé, ce qui a lieu en général, le nombre des équations devra être égal au nombre des inconnues : *l'énoncé doit permettre d'écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues*[1].

1. Il peut arriver qu'il permette d'en écrire davantage; le problème est alors impossible à moins que les équations ne soient pas *distinctes;* nous ne pouvons développer ce point ici; indiquons un exemple : *trouver deux nombres tels que leur somme soit* 8, *leur différence* 2, *et la différence de leurs doubles* 4; on a les équations $x+y=8$; $x-y=2$; $2x-2y=4$, dont la troisième est équivalente à la seconde; il suffit donc de conserver les deux premières. D'une manière générale les opérations ne sont pas distinctes lorsque l'une d'elles se réduit à une combinaison linéaire des autres; il est alors inutile d'en tenir compte, puisqu'elle est vérifiée lorsque les autres le sont. Mais nous ne pouvons faire une théorie complète des combinaisons linéaires d'équations du premier degré.

Au sujet du choix des inconnues, c'est surtout la pratique qui guide dans les cas où l'on peut hésiter; d'ailleurs s'il est souvent plus *commode* de prendre pour inconnues certaines quantités plutôt que d'autres, ce n'est pas *essentiel;* tout choix d'inconnues qui conduit à des équations du premier degré permet d'obtenir la solution, par des calculs plus ou moins longs.

71. **Exemples de problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.** PROBLÈME VI. — *On sait que 6m de drap et 5m de doublure coûtent 41fr; 8m de drap et 6m de doublure coûtent 54fr; quel est le prix du mètre de drap et du mètre de doublure?*

Soit x le prix du mètre de drap et y le prix du mètre de doublure, ces prix étant exprimés en francs. L'énoncé donne les équations :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 41 \\ 8x + 6y = 54. \end{cases}$$

La deuxième équation prend une forme plus simple si l'on divise tous les termes par 2 :

$$4x + 3y = 27.$$

On en tire :

$$y = \frac{27 - 4x}{3} = 9 - \frac{4}{3}x.$$

En portant cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$6x + 5\left(9 - \frac{4}{3}x\right) = 41$$

$$\left(6 - \frac{20}{3}\right)x = 41 - 45$$

$$\frac{-2}{3}x = -4$$

$$x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Ayant x, on a :

$$y = 9 - \frac{4}{3}x = 9 - 8 = 1.$$

Le prix du mètre de drap est 6^{fr} *et le prix du mètre de doublure est* 1^{fr}.

Problème VII. — *On suppose qu'un bicycliste a une vitesse de* 25^{km} *à l'heure en terrain plat, de* 15^{km} *à l'heure en montée, et de* 30^{km} *à l'heure en descente. Combien y a-t-il de plat, de montée et de descente sur une route de* 100^{km}, *sachant qu'il a mis* $4^h 24^m$ *pour la parcourir à l'aller et* $4^h 36^m$ *au retour ?*

Soit x le nombre de kilomètres de plat, y le nombre de kilomètres de montée, et z le nombre de kilomètres de descente, à l'*aller;* au retour la descente devient montée, et inversement. On a une première équation en exprimant que la longueur totale de la route est 100^{km} :

$$(1) \qquad x + y + z = 100.$$

On obtiendra deux autres équations en exprimant que le temps employé pour parcourir la route a été $4^h 24^m$, c'est-à-dire 264^m à l'aller et 276^m au retour. Pour parcourir x kilomètres avec une vitesse de 25^{km} à l'heure, il faut un nombre de minutes égal à $\frac{60x}{25}$; en additionnant les temps partiels obtenus de

même, on a les deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{60x}{25} + \dfrac{60y}{15} + \dfrac{60z}{30} = 264 \\ \dfrac{60x}{25} + \dfrac{60y}{30} + \dfrac{60z}{15} = 276 \end{cases}$$

qu'on peut écrire, plus simplement :

$$\begin{cases} (2) \quad \dfrac{12}{5}x + 4y + 2z = 264 \\ (3) \quad \dfrac{12}{5}x + 2y + 4z = 276. \end{cases}$$

Tirons de l'équation (1) la valeur de z :

$$(4) \qquad z = 100 - x - y$$

et portons-la dans les équations (2) et (3); il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{12}{5}x + 4y + 2(100 - x - y) = 264 \\ \dfrac{12}{5}x + 2y + 4(100 - x - y) = 276, \end{cases}$$

ou, en simplifiant et changeant les signes de la seconde équation :

$$\begin{cases} (5) \quad \dfrac{2}{5}x + 2y = 64 \\ (6) \quad \dfrac{8}{5}x + 2y = 124. \end{cases}$$

L'équation (5) nous donne :

$$(7) \qquad y = 32 - \frac{1}{5}x,$$

et, en portant dans (6), on obtient successivement :

$$\frac{8}{5}x + 64 - \frac{2}{5}x = 124$$
$$\frac{6}{5}x = 60$$
$$x = 50.$$

L'équation (7) donne alors :

$$y = 32 - 10 = 22$$

et l'équation (4) :

$$z = 100 - 50 - 22 = 28.$$

Il y a donc, à l'aller, 50^{km} de plat, 22^{km} de montée et 28^{km} de descente.

On aurait obtenu plus aisément cette valeur de x en faisant une combinaison linéaire des équations (1), (2), (3) avec les multiplicateurs 6, -1, -1 ; les inconnues y et z se trouvent éliminées et il reste :

$$\left(6 - \frac{24}{5}\right)x = 600 - 264 - 276,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{6}{5}x = 60,$$

d'où :

$$x = 50.$$

On remplacerait ensuite x par cette valeur dans les équations (1) et (2) ce qui donne :

(8) $$y + z = 50$$
(9) $$4y + 2z = 144$$

ou :

(9), $$2y + z = 72$$

et il suffit de faire une combinaison linéaire des équations (8) et (9), avec les multiplicateurs — 1 et 1, pour obtenir :

$$y = 22.$$

72. **Exemple de problème avec discussion.** — PROBLÈME VIII. — *On suppose qu'un bicycliste a une vitesse v en terrain plat, u en montée et w en descente. Combien y a-t-il de plat, de montée et de descente sur une route de a kilomètres, sachant qu'il a mis un temps t pour la parcourir à l'aller et un temps t' au retour? Les temps t et t' sont supposés évalués en heures et les vitesses en kilomètres à l'heure.*

Désignons par x^{km} la longueur totale des montées et par y^{km} la longueur totale de descente, *à l'aller;* la longueur du terrain plat est $a - x - y$, puisque la longueur totale est a. Au retour, il y a x^{km} de descente, y^{km} de montée et $a - x - y$ kilomètres de plat. En raisonnant comme pour le problème précédent, on a les équations :

(1) $$\begin{cases} \dfrac{x}{u} + \dfrac{y}{w} + \dfrac{a - x - y}{v} = t \\ \dfrac{x}{w} + \dfrac{y}{u} + \dfrac{a - x - y}{v} = t', \end{cases}$$

c'est-à-dire :

(2) $$\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}\right) + y\left(\dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{v}\right) = t - \dfrac{a}{v} \\ x\left(\dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{v}\right) + y\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}\right) = t' - \dfrac{a}{v}. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est :

$$(3)\quad d=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^2-\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)^2=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)$$

On a utilisé la formule :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

D'après l'énoncé du problème, il est naturel de supposer que l'on a :

$$(4)\qquad u<v<w,$$

c'est-à-dire que la vitesse est plus faible en montée qu'en terrain plat et plus forte en descente; on a donc, u, v, w étant positifs :

$$(5)\qquad \frac{1}{u}>\frac{1}{v}>\frac{1}{w}.$$

Le second facteur $\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)$ du déterminant n'est donc pas nul; mais le premier peut être nul; c'est ce qui a lieu dans le cas où l'on a :

$$(6)\qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{2}{v},$$

c'est-à-dire où le temps employé pour parcourir 1^{km} de montée et 1^{km} de descente est égal au temps employé pour parcourir 2^{km} de terrain plat. Il est assez naturel qu'il y ait dans ce cas impossibilité ou indétermination, car la solution ne peut pas être unique et déterminée; si, en effet, nous avons une solution, nous en obtiendrons une autre en remplaçant une longueur quelconque $2l^{km}$ de terrain

plat par l^{km} de montée et l^{km} de descente, le temps employé ne changera ni à l'aller ni au retour.

Supposons que le déterminant ne soit pas nul, nous aurons pour x et y des valeurs déterminées; pour qu'elles conviennent au problème il faut : 1° qu'elles soient positives; 2° que $a-x-y$ soit aussi positif.

Calculons x, y et $a-x-y$. On a :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)\left(t-\frac{a}{v}\right)-\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)\left(t'-\frac{a}{v}\right)}{d} \\ y = \dfrac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)\left(t'-\frac{a}{v}\right)-\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)\left(t-\frac{a}{v}\right)}{d} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$(7) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t'-\frac{a}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}{d} \\ y = \dfrac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t-\frac{a}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}{d} \end{cases}$$

On obtient ensuite :

$$(8) \quad a-x-y = \frac{a\left[d+\frac{2}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)\right]-\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)(t+t')}{d}$$

ou, en simplifiant :

$$(9) \qquad a-x-y = \frac{a\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}\right)-(t+t')}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}}$$

Il nous faut chercher à quelles conditions x, y, $a-x-y$ sont positifs. Si nous calculons $x-y$ nous obtenons :

$$(10) \qquad x-y=\frac{\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)(t-t')}{d}=\frac{t-t'}{\frac{1}{u}-\frac{1}{w}}.$$

Nous laisserons à l'élève le soin d'établir cette formule directement, d'après l'énoncé. Remarquons que l'on peut toujours supposer :

$$(11) \qquad t>t',$$

c'est-à-dire supposer que l'on met plus de temps à l'aller qu'au retour; sinon il suffirait d'appeler aller ce que nous appelions retour et retour ce que nous appelions aller; dans ce cas, on a comme il est naturel :

$$(12) \qquad x>y,$$

c'est-à-dire qu'il y a plus de montée que de descente à l'aller Il n'est donc pas utile d'écrire que x est positif; il suffit d'exprimer que y est positif et x qui est supérieur à y sera certainement positif. Écrivons donc que y est positif, ainsi que $a-x-y$; nous obtenons :

$$\frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t-\frac{a}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}{d}>0$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}\right)-(t+t')}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}}>0.$$

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'on a :

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}>0,$$

c'est-à-dire qu'il faut plus de temps pour parcourir 1^{km} de montée et 1^{km} de descente que pour parcourir 2^{km} de plat. Nous aurons alors $d>0$ et on pourra multiplier par d et résoudre les inégalités précédentes par rapport à a. On obtient ainsi :

$$(13)\qquad \frac{t+t'}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}}<a<\frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t}{\frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}$$

Telles sont les limites entre lesquelles doit être compris a pour que la solution du problème soit acceptable Pour que a puisse être compris entre ces limites, il est nécessaire que l'on ait :

$$(14)\qquad \frac{t+t'}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}}<\frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t}{\frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}$$

c'est-à-dire en chassant les dénominateurs qui sont positifs et réduisant

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)\left(\frac{t'}{w}-\frac{t}{u}\right)>0,$$

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v},$$

ou en divisant par le facteur positif :

$$(15)\qquad \frac{t'}{w}-\frac{t}{u}>0.$$

Il est nécessaire que cette dernière condition soit vérifiée ; sinon le problème ne serait possible pour aucune valeur de a ; lorsqu'elle est vérifiée les inégalités (13) font connaître l'intervalle dans lequel doit être compris a pour que le problème soit possible.

Supposons maintenant que l'on ait :

$$d = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} = 0. \tag{16}$$

Comme les coefficients de x et de y dans les équations (2) ne sont pas nuls, il y a, ou impossibilité, ou indétermination simple. Pour qu'il y ait indétermination simple, il faut et il suffit que les numérateurs des formules (7) se réduisent à zéro (ce qui a lieu en même temps pour les deux, puisque l'on ne doit avoir qu'une condition).

En écrivant que le numérateur de x est nul, on obtient :

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) t + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right) t' - \frac{a}{v}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right) = 0.$$

Or la condition (16) donne :

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{1}{v} - \frac{1}{w} \tag{17}$$

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{w} = 2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right),$$

de sorte que la relation (17) s'écrit :

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\left(t + t' - \frac{2a}{v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(18) \qquad t + t' - \frac{2a}{v} = 0.$$

Telle est la condition d'indétermination. Lorsqu'elle est remplie on peut choisir arbitrairement l'une des inconnues, y par exemple, et la valeur de x est alors fournie par la première des équations (2) qui donne, en tenant compte de (17) :

$$(19) \qquad x = y + \frac{t - \frac{a}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}.$$

On a d'ailleurs :

$$a - x - y = a - 2y - \frac{t - \frac{a}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} = \frac{\frac{a}{u} - t}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} - 2y.$$

Il faut choisir y de manière que x et y soient positifs, ainsi $a - x - y$. On doit donc avoir :

$$(20) \qquad y > 0$$

$$(21) \qquad \frac{\frac{a}{v} - t}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} < y < \frac{\frac{a}{u} - t}{2\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{v}\right)}$$

Pour que y puisse vérifier simultanément ces inégalités, il faut et il suffit que l'on ait (puisque $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ est positif) :

$$\frac{a}{u} - t > 0$$

$$\frac{\frac{a}{u}-t}{2} > \frac{a}{v}-t,$$

c'est-à-dire :

$$(22) \qquad a\left(\frac{2}{v}-\frac{1}{u}\right) < t < \frac{a}{u},$$

conditions qui sont compatibles puisque $\frac{1}{v}$ est inférieur à $\frac{1}{u}$; on a donc :

$$\frac{2}{v}-\frac{1}{u} < \frac{1}{v}.$$

Donc lorsque les conditions (16) (18) et (22) sont vérifiées, le problème est indéterminé; on peut prendre arbitrairement y dans les limites fixées par les inégalités (21) et x est alors donné par la formule (19).

On peut résumer la discussion dans le tableau de la page 146.

Nous laissons à l'élève le soin de discuter les cas limites, c'est-à-dire les cas où l'une des inégalités (13), (22), etc., se transformerait en égalité; il devra discuter aussi le cas où l'on a :

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}<0$$

et aussi les cas où la vitesse v serait égale à u ou à w et où les trois vitesses, u, v, w seraient égales; il sera aussi fort utile de traiter le problème par le raisonnement direct et de retrouver ainsi les résultats de la discussion. Mais ce qui précède

suffit à montrer d'une manière assez complète en quoi consiste la discussion d'un problème du premier degré à données littérales.

HYPOTHÈSES RÉSULTANT DE L'ÉNONCÉ $o < u < v < w \quad t > o \quad t' > o \quad a > o.$		
Hypothèses faites pour abréger la discussion; on aurait une discussion analogue dans le cas où elles ne seraient pas vérifiées. $t > t' \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} \geqslant o.$		
$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} \neq o.$	$\frac{t}{w} - \frac{t}{u} < o.$	Problème impossible.
	$\frac{t'}{w} - \frac{t}{u} > o.$	Problème possible à condition que a vérifie les inégalités (13); solution donnée par les formules (7).
$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} = o.$	$t + t' - \frac{2a}{v} \neq o.$	Problème impossible.
	$t + t' - \frac{2a}{v} = o,$ conditions (22) non vérifiées.	Problème impossible.
	$t + t' - \frac{2a}{v} = o,$ $\frac{2}{v} - \frac{1}{u} < \frac{t}{a} < \frac{1}{u}.$	Problème indéterminé : y est assujetti aux inégalités (21) et x donné par la formule (19).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

86. — Une montre avance de 10^m en 24^h; on l'a mise à l'heure à midi; quelle heure est-il lorsqu'elle marque 6^h?

87. — Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que si l'on augmente la base de 8^m et la hauteur de 5^m la surface augmente de 180 mètres carrés; tandis que si l'on augmente la base de 3^m et que l'on diminue la hauteur de 4^m la surface diminue de 30 mètres carrés.

88. — Deux courriers se déplacent sur un axe avec les vitesses u et mu; à l'origine des temps, leurs abscisses sont a et b; on demande à quelle époque ils se rencontreront. Discuter.

Application : $u = 30^{km}$ à l'heure; $m = -2$; $a = 50^{km}$; $b = -3\,500^m$.

89. — Étant donné un triangle ABC on désigne par P, Q, R les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA, AB; on pose :

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad AQ = AR = x, \quad BR = BP = y,$$
$$CP = CQ = z$$

On demande de calculer x, y, z étant donnés a, b, c. Discuter.

90. — Même question en remplaçant le cercle inscrit par l'un des cercles ex-inscrits.

91. — Deux bicyclistes roulent dans le même sens sur une piste circulaire dont la longueur est 500^m, chacun d'eux étant animé d'un mouvement uniforme; on constate que le plus agile dépasse l'autre toutes les 5 minutes; l'un d'eux se met ensuite à tourner en sens inverse, sa vitesse gardant la même valeur absolue, et dans cette seconde expérience ils se croisent toutes les 24 secondes; on demande quelles sont leurs vitesses, que l'on évaluera en kilomètres à l'heure.

92. — Deux bicyclistes roulent dans le même sens d'un mouvement uniforme sur une piste circulaire de longueur a; le plus agile dépasse l'autre toutes les n secondes; ils roulent ensuite en sens inverses sur une piste circulaire de longueur b, leurs vitesses restant les mêmes en valeur absolue;

dans cette seconde expérience ils se croisent toutes les p secondes. Calculer leurs vitesses. Discuter.

93. — Une roue de voiture a 4^m de circonférence; on la photographie pendant la marche, la durée de pose étant 1/30 de seconde, et l'on constate sur le cliché que, pendant la durée de la pose, chaque rayon de la roue a tourné de la moitié de l'angle que font entre eux deux rayons consécutifs; sachant que la roue a 12 rayons équidistants, on demande quelle était la vitesse de la voiture.

94. — Un bassin est alimenté par 3 robinets; si l'on ouvre les deux premiers il se remplit en c heures; si l'on ouvre le premier et le troisième, il se remplit en b heures; si l'on ouvre le second et le troisième, il se remplit en a heures; sachant que la capacité du bassin est A mètres cubes, on demande combien chaque robinet débite de litres à la seconde. Discuter.

95. — Étant donnés trois points A, B, C sur un axe déterminer un point M de cet axe tel que l'on ait :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \rho$$

Discuter. — Le nombre ρ s'appelle le *rapport anharmonique* des quatre points A, B, C, M. Étudier le cas particulier où l'abscisse du point A étant égale à 0, et celle du point C à 1, l'abscisse du point B prend des valeurs positives de plus en plus grandes et devient finalement infinie.

96. — Partager un nombre A en n parties proportionnelles à n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ c'est, par définition, trouver des nombres $x_1, x_2, \ldots x_n$ tels que l'on ait :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A$$

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{x_n}{a_n}$$

Résoudre et discuter ce système, en supposant que les nombres $a_1, a_2, \ldots a_n$ puissent être positifs ou négatifs; on montrera qu'il est déterminé à condition que l'on ait :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$$

97. — Déterminer p et q de manière que dans le produit

$$(x^2 + px + q)(ax^2 + bx + c)$$

les coefficients de x^3 et de x soient nuls. Discuter.

98. — Déterminer p, q, r de manière que dans le produit

$$(x^3 + px^2 + qx + r)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

les coefficients de x^5, x^3, x soient nuls. Discuter.

99. — On considère un ballon dirigeable qui décrit une trajectoire rectiligne de 50^{km} dirigée du nord au sud et qui revient ensuite à son point de départ; pendant tout le trajet, on suppose que le vent a une vitesse constante, et souffle constamment du nord vers le sud. On admet que lorsque le ballon se dirige dans le même sens que le vent, sa vitesse réelle est égale à sa vitesse propre augmentée de la vitesse du vent, tandis que lorsqu'il marche contre le vent, sa vitesse réelle est égale à sa vitesse propre diminuée de la vitesse du vent. Cela posé, on demande d'évaluer la vitesse du ballon en kilomètres à l'heure et la vitesse du vent en mètres à la seconde sachant que la durée du trajet a été t^h à l'aller et t'^h au retour. Discuter. Appliquer au cas où l'on a :

$$t = 1^h;\ t' = 2^h 15^m$$

100. — Résoudre le système :

$$\lambda \cos x + 2 \cos y = 3$$
$$(\lambda - 1) \cos x + 3 \cos y = 2$$

Discuter. — Il y aura lieu d'exprimer que les valeurs de $\cos x$ et de $\cos y$ sont comprises entre -1 et $+1$.

101. — On considère un mélange de trois corps ayant respectivement pour formules H^2O, $C^nH^pO^q$, C^6H^6; on constate par l'analyse que ce mélange renferme un poids a d'hydrogène, b de carbone et c d'oxygène; on demande quels sont les poids respectifs des trois corps qui figurent dans le mélange ($H = 1$; $C = 6$; $O = 16$). Discuter.

Indiquer en particulier pour quelles valeurs simples de n, p, q le problème est impossible (ou indéterminé, si a, b, c sont convenablement choisis).

102. — On considère un mélange de trois corps ayant respectivement pour formules H^2O, C^2O^λ, $C^4H^\mu O^\nu$; ce mélange renferme un poids a d'hydrogène, b de carbone, c d'oxygène. Quels sont les poids des trois corps qui figurent dans le mélange? Discuter.

CHAPITRE V

VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ : REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

I. VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ

73. **Généralités sur les fonctions.** — On appelle binome du premier degré l'expression $ax + b$, dans laquelle a et b sont des nombres considérés comme connus, x étant une *variable*. Étudier la variation de ce binome, c'est chercher comment il varie lorsque la variable x prend toutes les valeurs possibles. Nous désignerons la valeur du binome par y, ce que nous exprimerons en écrivant :

$$y = ax + b.$$

Cette relation, dans laquelle a et b sont considérés comme des nombres donnés, fait correspondre à chaque valeur de la variable x une valeur de la variable y ; lorsque la variable x prend une valeur déterminée, la variable y prend aussi une valeur déterminée. On exprime cette dépendance entre x et y en disant que y est une *fonction* de x.

En général, lorsque y est fonction de x, x est aussi fonction de y; en effet, *si a n'est pas nul*, on a :

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}.$$

Si a était nul, x ne pourrait pas être regardé comme fonction de y, *parce que y serait assujetti à prendre la valeur b*, à l'exclusion de toute autre valeur; y ne pourrait donc pas être pris comme *variable*. Lorsque l'on regarde y comme fonction de x, on dit que x est la *variable indépendante*, parce que l'on suppose que x varie indépendamment de toute condition, c'est-à-dire d'une manière arbitraire, tandis que y est la *fonction*, dont la variation *dépend* de celles de x (dans le cas particulier où a est nul, y est constant; on regarde cela par extension comme une dépendance particulière; y est égal à b pour toute valeur de x; nous verrons plus loin que cette extension est très naturelle, quand on se place au point de vue géométrique — p. 180, fig. 26).

Lorsque l'on a une relation entre x et y on peut choisir l'une de ces lettres comme variable *indépendante* et l'autre comme fonction; l'usage très répandu, auquel nous nous conformerons le plus souvent, est de choisir x comme variable indépendante et y comme fonction. Il existe des fonctions très compliquées, c'est-à-dire des lois de dépendance très compliquées par lesquelles une variable y est déterminée lorsqu'une autre variable x est déterminée; l'un des buts principaux des Mathématiques est l'étude des fonctions. La fonction y que nous venons

de définir est l'une des plus simples ; on l'appelle fonction *linéaire*, nous verrons bientôt la raison de cette dénomination.

74. **Étude de la fonction linéaire.** — Nous allons étudier la fonction linéaire, en donnant d'abord à a et b, pour plus de précision, des valeurs numériques simples et déterminées ; on se rendra bien compte ainsi de la marche suivie.

Considérons donc, par exemple, la fonction y définie par la relation :

$$y = 2x + 3.$$

Donnons à x deux valeurs différentes x_1 et x_2 et désignons par y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y ; nous aurons :

$$y_1 = 2x_1 + 3$$
$$y_2 = 2x_2 + 3,$$

d'où nous conclurons :

$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1).$$

On voit que la différence des deux valeurs de y est égale au produit par 2 de la différence des deux valeurs de x, prises dans le même ordre. Il en résulte, en particulier, que suivant que x_2 sera plus grand ou plus petit que x_1, y_2 sera plus grand ou plus petit que y_1 ; on peut exprimer ce fait en disant que, si x croît, y croît, et si x décroît, y décroît. On dit alors que la fonction y est une fonction *croissante*.

Définition. — *On dit qu'une fonction y est une fonction croissante de x, lorsque, si l'on fait croître x,*

c'est-à-dire si l'on donne à x des valeurs plus grandes, y croît aussi, c'est-à-dire prend des valeurs plus grandes. Cette définition sera complétée plus loin (n° 111); nous verrons alors qu'il y a des fonctions qui sont croissantes pour certaines valeurs de x et pas pour d'autres; ici, il s'agit de fonctions *toujours croissantes.*

Soit maintenant la fonction :

$$y = -2x + 5.$$

En conservant les mêmes notations, on aura :

$$y_1 = -2x_1 + 5$$
$$y_2 = -2x_2 + 5$$
$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1).$$

La différence des deux valeurs de y est ici égale au produit par -2 de la différence des deux valeurs correspondantes de x, prises dans le même ordre. Donc si x_2 est supérieur à x_1, y_2 sera inférieur à y_1; si x croît, y décroît; si x décroît, y croît; la fonction y est dite *décroissante.*

Définition — *On dit qu'une fonction y est une fonction décroissante de x lorsque, si l'on fait croître x, c'est-à-dire si l'on donne à x des valeurs plus grandes, y décroît, c'est-à-dire prend des valeurs plus petites.* Cette définition sera, comme celle des fonctions croissantes, complétée plus loin; mais elle nous suffit pour l'instant, car les fonctions que nous étudions sont, ou *toujours croissantes*, ou *toujours décroissantes*, ou *constantes*, c'est-à-dire indépendantes de x. On peut, en effet, conclure de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *La fonction linéaire de x définie par la relation :*

$$y = ax + b,$$

est toujours croissante lorsque le coefficient a est positif, toujours décroissante lorsque le coefficient a est négatif, constante lorsque le coefficient a est nul.

Les deux premières parties de ce théorème résultent de la formule :

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

qui montre que $y_2 - y_1$ est de même signe que $x_2 - x_1$, ou de signe contraire, suivant que a est positif ou négatif; la troisième partie est évidente, car si l'on suppose $a = 0$, on a *constamment*, c'est-à-dire quel que soit x, la relation $y = b$.

Nous reviendrons sur ce théorème à la fin du chapitre, après avoir exposé la représentation graphique.

75. — Nous allons maintenant étudier comment varie y lorsque l'on donne successivement à x toutes les valeurs possibles, positives ou négatives, ce que l'on exprime brièvement en disant que *l'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$*. Faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$ c'est supposer d'abord x très grand en valeur absolue et négatif, et considérer successivement des valeurs de x algébriquement de plus en plus grandes, jusqu'à ce qu'on soit amené à des valeurs très grandes positives.

Ainsi, on supposera successivement, par exemple, que x prend les valeurs :

$$-100000, \quad -1000, \quad -1, \ 0, \ 10, \ 1000, \ 100000,$$

et aussi les valeurs intermédiaires.

Il importe de remarquer que l'expression *valeurs très grandes* n'a, par elle-même, aucun sens ; une longueur de 20 kilomètres est très grande si on la compare aux dimensions d'une feuille de papier; elle est très petite si on la compare aux dimensions du globe terrestre; une longueur d'un million de kilomètres est elle-même très petite si on la compare aux distances des étoiles. Il faut donc entendre *très grandes* par rapport aux autres quantités que l'on considère, c'est-à-dire, dans la question qui nous occupe, par rapport aux coefficients a et b.

76. — Lorsque x est très grand en valeur absolue, y est aussi très grand en valeur absolue; si a est positif, y a le même signe que x; si a est négatif, y a un signe opposé à celui de x. En effet, soit, par exemple :

$$y = 2x + 500.$$

Si $x = -10$, $y = 480$; y est positif, à cause du terme positif 500; si $x = -100$, $y = 300$, c'est-à-dire est encore positif; mais si $x = -100\,000$, $y = -200\,000 + 500 = -199\,500$; le terme positif 500 n'empêche plus y d'être très grand en valeur absolue et négatif. De même, si l'on a :

$$y = -3x + 5000,$$

et si $x = 1\,000\,000$, $y = -3\,000\,000 + 5000 = -2\,995\,000$. On exprime ce fait d'une manière abrégée de la manière suivante :

Théorème. — *Lorsque a est positif, y est égal à $+\infty$ pour $x = +\infty$ et à $-\infty$ pour $x = -\infty$; lorsque a est négatif, y est égal à $-\infty$ pour $x = +\infty$ et à $+\infty$ pour $x = -\infty$.*

Lorsque a est différent de zéro, y est égal à zéro

lorsque l'on a :

$$ax + b = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Il y a donc une valeur de x et une seule pour laquelle y est nul.

Désignons cette valeur particulière de x par x', c'est-à-dire posons :

$$x' = -\frac{b}{a}$$

d'où :

$$b = -ax'.$$

Nous aurons :

$$y = ax + b = ax - ax',$$

c'est-à-dire :

$$y = a(x - x').$$

Telle est la forme que l'on peut donner au binome du premier degré lorsque a n'est pas nul; x est une variable et x' une valeur particulière de cette variable. Sous cette forme, on voit bien que y est nul dans le cas où x est égal à x' et seulement dans ce cas.

77. — Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour former le tableau des variations de y, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Supposons d'abord a positif et soit, pour fixer les idées, la fonction :

$$y = 2x - 5.$$

Pour $x = -\infty$, y est égal à $-\infty$; lorsque x croît, y croît, c'est-à-dire prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est de plus en plus petite; pour $x = 0$, $y = -5$; pour $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$; lorsque x croît à partir de $\frac{5}{2}$, y continue à croître et prend, par suite, des valeurs positives de plus en plus grandes; enfin, pour $x = +\infty$, $y = +\infty$ On peut résumer ces remarques dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	négatif; croît	-5	négatif; croît	0	positif; croît	$+\infty$

On a indiqué sur une première ligne les valeurs *remarquables* de x, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles il se produit une circonstance particulière, que l'on juge digne de fixer l'attention. Ces valeurs remarquables sont rangées en ordre croissant; on a inscrit au-dessous de chacune d'elles la valeur correspondante de y; et, dans les intervalles qui séparent ces dernières valeurs, on a mentionné brièvement la manière dont se comporte y lorsque x parcourt en croissant l'intervalle situé au-dessus.

78. — Considérons encore la fonction :

$$y = -\frac{3}{2}x - 1.$$

Les valeurs remarquables de x seront ici $-\infty$,

$-\frac{2}{3}$, qui annule y, o qui donne à y la valeur -1, et $+\infty$; de plus y est décroissant, puisque le coefficient de x est négatif. On aura donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	positif; décroît	0	négatif, décroît	-1	négatif, décroît	$-\infty$

Nous compléterons l'étude des variations du binome du premier degré, par la méthode de la représentation graphique que nous allons exposer.

II. — NOTIONS SUR LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

79. **Graphique de la température.** — Supposons que nous désirions nous rendre compte de la température qu'il fait pendant une après-midi du mois d'août, sur la terrasse d'une maison de campagne. Que ferons-nous? Nous y placerons un thermomètre, supposé exact, et de temps en temps, nous noterons la température qu'il indique (exprimée en degrés centigrades, si le thermomètre est un thermomètre centigrade). Si nous supposons que nous faisons notre relevé d'heure en heure, nous inscrivons ainsi sur notre carnet les observations suivantes :

Midi	25°	7h	18°
1h	26°	8h	17°
2h	26°,5	9h	16°,5
3h	26°	10h	16°
4h	25°,5	11h	15°,5
5h	24°	minuit	15°
6h	21°		

La lecture de ces observations permet de se rendre compte de la variation de la température ; on peut, en les examinant avec attention, voir, par exemple, que c'est à 2^h que la température a été la plus élevée, qu'elle a peu diminué entre 2^h et 4^h, mais qu'elle a diminué bien plus entre 4^h et 5^h et

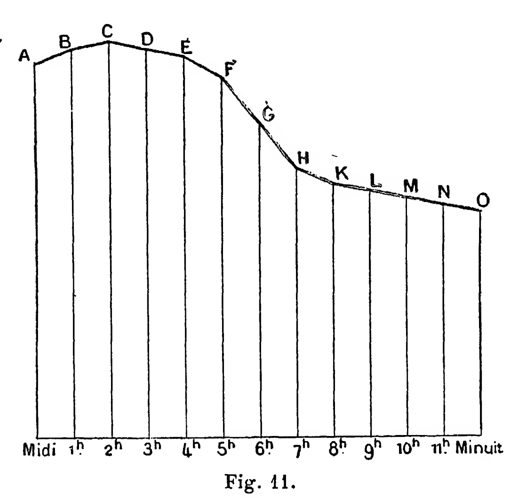


Fig. 11.

surtout entre 5^h et 6^h et entre 6^h et 7^h, etc. Mais ces diverses remarques seront rendues bien plus aisées à faire si l'on construit, à l'aide des nombres relevés sur le carnet, un *graphique de la température*. — Voici ce que l'on entend par là.

Traçons (fig. 11) une ligne horizontale sur laquelle nous marquerons des points équidistants, qui correspondront aux heures successives : midi, 1^h, 2^h, etc., jusqu'à minuit. En chacun de ces points élevons une perpendiculaire sur laquelle nous pren-

drons une longueur proportionnelle à la température observée à l'heure indiquée. Par exemple, si nous convenons de représenter 1° par 2^{mm}, la perpendiculaire élevée au point marqué midi aura pour longueur $25 \times 2 = 50^{mm}$; la perpendiculaire élevée au point marqué 1^{h} aura pour longueur $26 \times 2 = 52^{mm}$, etc. Nous obtenons ainsi une suite de points ABCDE...; nous joindrons chacun d'eux au suivant par une droite et nous obtiendrons ainsi une ligne brisée que l'on appelle *graphique de la température*. Il suffit de jeter un coup d'œil sur cette ligne pour se rendre compte de la manière dont a varié la température pendant l'après-midi. On voit que C est le point le plus élevé; c'est donc à 2^{h} qu'il a fait le plus chaud; les points D et E sont presque aussi élevés que C; la température a donc peu décru entre 2^{h} et 3^{h} et entre 3^{h} et 4^{h}. Au contraire les droites FG et GH sont bien plus inclinées; entre 5^{h} et 6^{h}, 6^{h} et 7^{h}, il y a donc eu une grande variation, une chute de température assez brusque, etc. Tout cela apparaît à la seule inspection du graphique, bien plus simplement qu'à la lecture des nombres inscrits sur le carnet.

80. — Nous avons supposé que, pour obtenir le graphique, on a observé la température d'heure en heure; il est clair que l'on obtiendrait un graphique plus exact en l'observant tous les quarts d'heure, toutes les 5 minutes, toutes les minutes. On aurait ainsi un nombre de points bien plus grand; la ligne brisée aurait un plus grand nombre de côtés et ses angles seraient tous très rapprochés de 180°.

On a imaginé des thermomètres, dits thermomè-

tres enregistreurs (fig. 12) et qui, au moyen d'un

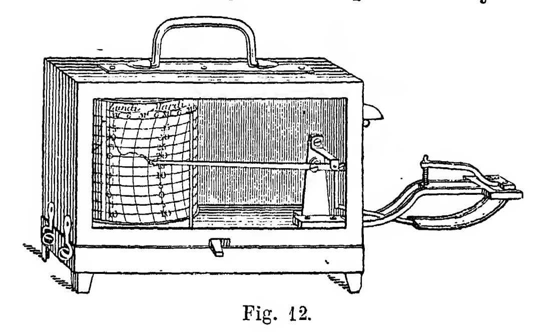


Fig. 12.

mécanisme que nous n'avons pas à décrire ici, marquent à chaque instant sur une feuille de papier

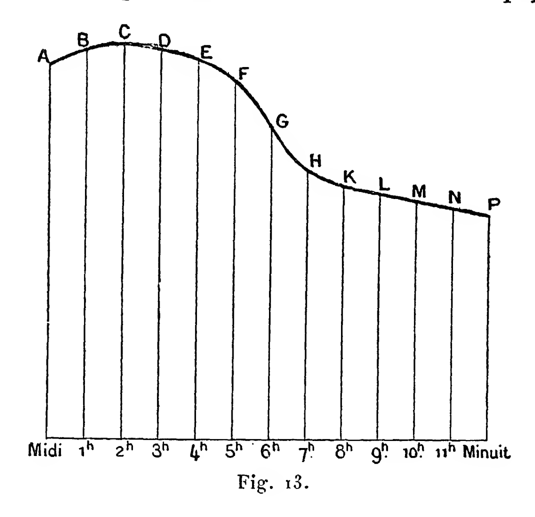


Fig. 13.

convenablement disposée le point A qui représente la température à cet instant. La feuille de papier est

d'ailleurs entraînée par un mouvement d'horlogerie, de telle manière qu'à midi, c'est le point A qui est marqué, à 1^h c'est le point B, à 2^h le point C, et à chaque instant le point correspondant à cet instant. L'ensemble de ces points forme une courbe continue (fig. 13), qui fournit la *représentation graphique complète des variations de la température.*

En fait les thermomètres enregistreurs donnent une courbe un peu différente de celle que nous venons de figurer; les perpendiculaires que nous avons figurées sont remplacées, par suite de la disposition de l'appareil, par des arcs de cercle d'assez grand rayon; on obtient ainsi une courbe telle que celle-ci (fig. 14) :

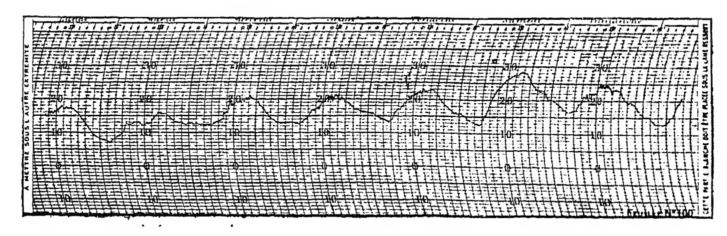


Fig. 14.

La bande de papier figurée correspond à une semaine; les arcs de cercle de grand rayon correspondent à des intervalles de 2 heures; les arcs de cercle correspondant à midi et à minuit sont marqués d'un trait fort et ceux qui correspondent à 6 h. du matin ou du soir, d'un trait moyennement fort. Pour plus de simplicité, on n'a figuré que ceux-là sur la fig. 12 représentant le thermomètre en train de fonctionner.

On peut résumer la marche suivie par la règle suivante, dans laquelle nous la précisons et définissons quelques termes utiles.

Règle. — *Pour représenter graphiquement les variations de la température, on trace* (fig. 15) *un axe* Ox *sur lequel on représente les temps par des longueurs proportionnelles. Dans ce but, on fixe*

une unité de longueur et une unité de temps, une origine O des abscisses, et une origine des temps; un instant quelconque est alors représenté par le point dont l'abscisse est égale à l'époque de cet instant (n° 33). Par exemple, si l'unité de longueur choisie est le centimètre et l'unité de temps l'heure, on représente $1^{h}45^{m}$ par un point A tel que $OA = 1^{cm},75$, l'origine des temps étant midi.

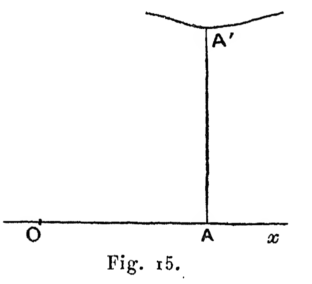


Fig. 15.

Ceci fait, en chaque point A on élève une perpendiculaire AA′ à l'axe des abscisses et on porte sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle à la température. Pour cela, on fixe une unité de température et une unité de longueur (qui pourrait ne plus être la même que tout à l'heure) et on détermine le point A′ par la condition que la mesure de AA′ soit égale au nombre qui mesure la température avec l'unité choisie.

On n'a plus qu'à joindre par un trait continu tous les points tels que A′ ainsi obtenus, pour avoir le graphique de la température.

Le segment OA s'appelle *abscisse*, et le segment AA′ *ordonnée* du point A′; comme nous l'avons dit, on pourrait prendre, pour mesurer ces deux segments, des unités de longueurs différentes; *pour plus de simplicité, on choisit cependant en général la même unité, et c'est ce que nous ferons désormais, quand nous ne préviendrons pas du contraire.*

Si cette unité est le centimètre, le segment OA

représente un temps dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure OA et le segment AA′ représente une température dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure AA′.

81. **Abscisses et ordonnées positives et négatives.** — Supposons que la température soit *au-dessous de zéro*, c'est-à-dire mesurée par un nombre négatif; il sera alors naturel de la représenter par une ordonnée *au-dessous de* Ox et non plus au-dessus. Supposons, par exemple, que les températures relevées pendant une nuit d'hiver soient les suivantes :

6h soir	$+3^\circ$	1h matin	$-6^\circ,7$
7h soir	$+2^\circ 1$	2h matin	$-7^\circ,5$
8h soir	$+1^\circ$	3h matin	$-8^\circ,2$
9h soir	$-0^\circ,9$	4h matin	$-8^\circ,7$
10h soir	$-2^\circ,5$	5h matin	$-8^\circ,9$
11h soir	$-4^\circ 2$	6h matin	-9°
minuit	$-5^\circ,6$		

le graphique de la température sera le suivant (fig. 16), dans lequel on a représenté par une abscisse de 5mm *une heure* et par une ordonnée de 5mm *un degré*.

De même, si l'on suppose que l'origine des temps soit minuit, on voit qu'une époque postérieure à minuit, telle que 3h du matin, est représentée par une abscisse égale à $+3$, l'origine des abscisses étant le point O qui correspond à minuit, tandis qu'une époque antérieure à minuit, par exemple 10h du soir, est représentée par une abscisse égale à -2. Nous allons préciser ceci en définissant, d'une manière générale, le système de coordonnées que

l'on appelle cartésiennes, du nom de leur inventeur Descartes [1] (en latin *Cartesius*).

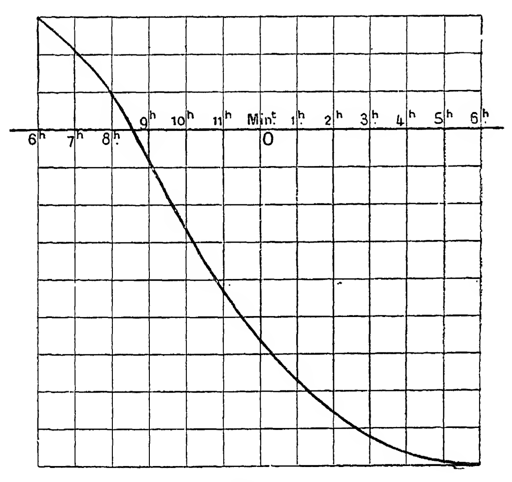


Fig. 16.

82. **Définition générale des coordonnées cartésiennes.** — Considérons deux axes Ox, Oy perpendiculaires l'un à l'autre; ou, comme on dit plus brièvement, *deux axes rectangulaires*, et soit M un point situé dans l'angle xOy formé par les directions positives des deux axes (fig. 17). Abaissons du point M les perpendiculaires MA et MB sur les axes; le quadrilatère OAMB est un *rectangle*. Mesurons les côtés de ce rectangle avec une unité de longueur préalablement choisie; sur la figure,

1. Célèbre philosophe et mathématicien français, qui vivait au XVIIe siècle.

l'on a :

$$OA = BM = 3$$
$$OB = AM = 4,5.$$

Le nombre 3 sera dit l'*abscisse* de M et le nombre 4,5 son *ordonnée;* les deux nombres 3 et

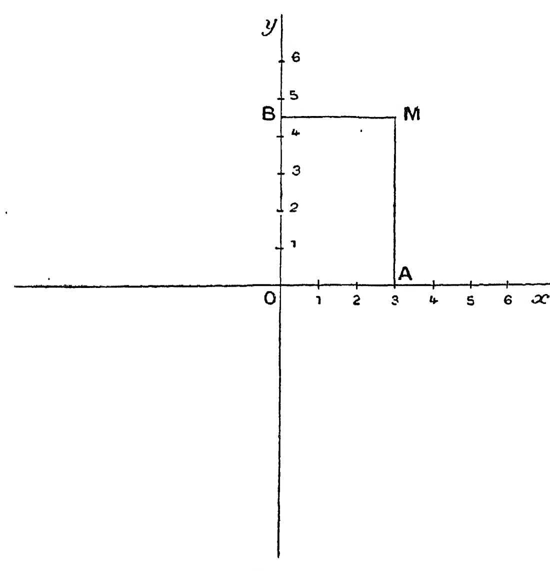


Fig. 17.

4,5 sont les *deux coordonnées* de M, c'est-à-dire les deux nombres qui servent à fixer la position de M dans le plan ; les axes Ox et Oy sont les *axes de coordonnées;* Ox est l'*axe des abscisses* et Oy l'*axe des ordonnées*. Le point O est l'*origine des coordonnées;* c'est à la fois l'origine des abscisses et l'origine des ordonnées.

Considérons maintenant (fig. 18) des points P, Q, R situés dans les trois autres angles que forment les axes de coordonnées; les coordonnées de l'un de ces points seront définies de la même manière; par

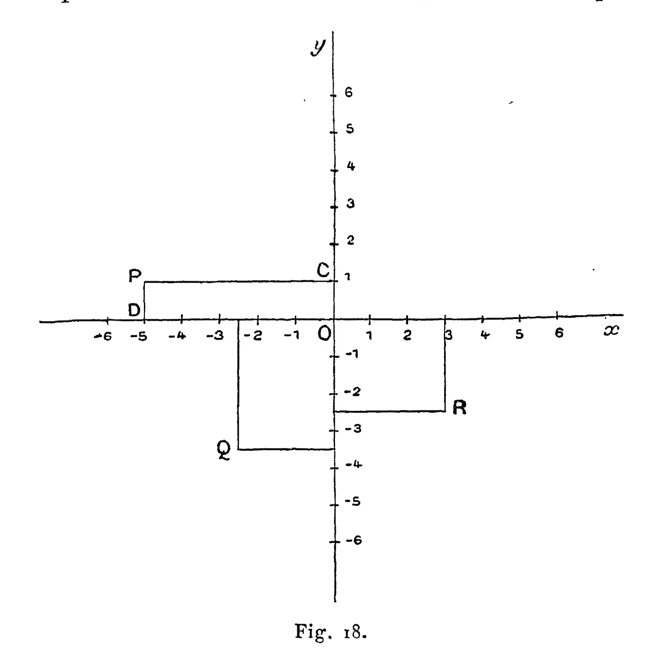


Fig. 18.

exemple, pour le point P, on construira le rectangle OCPD; les coordonnées de P sont égales aux mesures des segments OD et OC, c'est-à-dire à — 5 et à 1, puisque le segment OD est dirigé dans le sens négatif et OC dans le sens positif. De même, on voit sur la figure que le point Q a pour abscisse — 2,5 et pour ordonnée — 3,5 et que le

point R a pour abscisse 3 et pour ordonnée — 2,5. En résumé on a la règle suivante.

Règle. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *les coordonnées d'un point* M *du plan sont définies comme il suit : abaissons du point* M *la perpendiculaire* MA *sur* Ox *et la perpendiculaire* MB *sur* Oy; *l'abscisse de* M *est égale, en grandeur et en signe, au segment* OA *de l'axe des abscisses* Ox *et l'ordonnée de* M *est égale, en grandeur et en signe, au segment* OB *de l'axe des ordonnées* Oy.

Nous savons ainsi obtenir les coordonnées d'un point donné; il n'est pas moins important de savoir *construire un point dont les coordonnées sont données;* nous démontrerons à ce sujet le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *une unité de longueur, et deux nombres quelconques positifs ou négatifs, il existe un point et un seul admettant pour abscisse le premier de ces nombres et pour ordonnée le second; ce point s'obtient par la construction suivante : on prend sur* Ox *un segment* OA *équivalent à l'abscisse donnée et sur* Oy *un segment* OB *équivalent à l'ordonnée donnée; le point* M *cherché est le quatrième sommet du rectangle dont trois sommets coïncident avec les points* A, O, B.

En effet, le point M ainsi défini (fig 17) a bien ses coordonnées égales aux nombres donnés, et il est le seul, car tout point dont l'abscisse est égale à OA et l'ordonnée à OB est tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur Ox passe en A, c'est-à-dire coïncide avec MA, tandis que la perpendiculaire abaissée sur Oy coïncide avec MB, le point cherché doit donc coïncider avec M.

On voit sans peine que cette construction est bien identique à celle que nous avons donnée pour les graphiques de la température; nous prenions l'abscisse OA égale à la mesure du temps (positive ou négative) et nous élevions en A une perpendiculaire à Ox située au-dessus ou au-dessous, suivant que la température avait une mesure positive ou négative, et égale à cette mesure. L'égalité déjà remarquée des côtés opposés du rectangle entraîne l'identité des deux constructions.

83. Cas particuliers. — Si l'abscisse donnée est égale à zéro, le point A coïncide avec le point O et par suite le point M coïncide avec le point B; donc *les points dont l'abscisse est égale à zéro sont les points de l'axe Oy, c'est-à-dire de l'axe des ordonnées*. De même, *les points dont l'ordonnée est égale à zéro sont les points de l'axe des abscisses*. Le point O est le seul point dont les deux coordonnées sont nulles.

On désigne d'habitude l'abscisse par la lettre x, et l'ordonnée par la lettre y. Lorsque l'on a plusieurs points qu'il est nécessaire de distinguer, on affecte ces lettres d'indices : x_1, x_2, x_3..., y_1, y_2, y_3..., en ayant soin d'affecter d'un même indice les deux coordonnées d'un même point. On emploie aussi assez souvent la lettre a pour les abscisses et la lettre b pour les ordonnées. Enfin, on se sert aussi des lettres grecques α, β (au lieu de a, b) et ξ, η (au lieu de x, y).

Au lieu de dire *le point* M *dont l'abscisse est égale à 2 et dont l'ordonnée est égale à —3*, on dira et écrira plus brièvement : *le point* M ($x = 2$, $y = -3$) ; ou bien *le point* M (2, —3), en ayant soin d'écrire

d'abord l'abscisse et ensuite l'ordonnée, que l'on sépare par une virgule. Si l'on n'a pas jugé utile de désigner ce point par une lettre on pourra dire simplement : *le point* $x = 2$, $y = -3$; ou : *le point* $(2, -3)$.

III. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ

84. — Supposons que nous ayons plongé un thermomètre dans un vase rempli d'eau froide et rapproché d'un feu modéré; à chaque minute nous notons la température indiquée par le thermomètre et nous obtenons ainsi un tableau tel que le suivant [1] :

Époque.	Température.	Époque.	Température.
0.	1°	3m	7°
1m	3°	4m	9°
2m	5°	5m	11°

Si nous convenons de désigner par x l'époque exprimée en minutes, et par y la température

---

1. Bien entendu, on n'obtiendra en pratique un tel tableau, que si l'on se sert d'un thermomètre peu précis et si l'on fait des observations grossières; si l'on avait un thermomètre divisé en dixièmes de degré et que l'on observe à l'œil le centième de degré, on aurait, par exemple, des températures telles que les suivantes :

Époque.	Température.	Époque.	Température.
0.	1°,01	3m	7°,02
1m	2°,98	4m	9°,01
2m	4°,99	5m	10°,97

de sorte que la courbe ne serait qu'approximativement une droite; mais elle y ressemblerait assez pour que l'on puisse conjecturer que le phénomène physique est bien représenté par une droite, avec une approximation inférieure aux erreurs d'observation.

correspondante exprimée en degrés, l'inspection de ce tableau montre que l'on a :

$$y = 2x + 1,$$

lorsque x a l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. La température s'élève régulièrement de 2° par minute. Il est donc à présumer qu'en $\frac{1}{5}$ de minute par exemple, la température s'élève de $\frac{1}{5}$ de 2°, c'est-à-dire de $\frac{2}{5}$ de degré. Il en résulte qu'à l'époque $x = 3^m \frac{1}{5}$ la température observée aurait été $y = 7^\circ \frac{2}{5}$, de sorte que l'on a encore entre l'époque x et la température correspondante y, la relation :

$$y = 2x + 1.$$

Nous sommes ainsi conduits à admettre que cette relation est vérifiée pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 5, c'est-à-dire pour toute époque comprise entre les époques extrêmes où l'on a observé. Nous exprimerons ce fait en disant que cette relation donne la loi des températures pendant l'intervalle de temps étudié

Effectuons la représentation graphique de la variation de la température. Dans ce but, nous tracerons (fig. 19) deux axes rectangulaires Ox, Oy et nous porterons sur Ox cinq segments consécutifs égaux à l'unité, ce qui nous fournit les points 1, 2, 3, 4, 5, qui correspondent aux époques 1, 2, 3, 4, 5, l'origine O correspondant à l'époque zéro. Nous élèverons en ces points les ordonnées $0A = 1$,

$1B = 3$, $2C = 5$, $3D = 7$, $4E = 9$, $5F = 11$. Nous allons démontrer d'abord que les points ABCDEF sont en ligne droite. Dans ce but, menons par A la parallèle à Ox, qui rencontre les ordonnées en B′, C′, D′, E′, F′; nous aurons :

$$AB' = 1, \quad AC' = 2, \quad AD' = 3, \quad AE' = 4, \quad AF' = 5.$$
$$B'B = 2 \quad C'C = 4 \quad D'D = 6 \quad E'E = 8 \quad F'F = 10$$

Les triangles rectangles AB′B, AC′C, AD′D, AE′E, AF′F sont donc semblables comme ayant les côtés de l'angle droit proportionnels; il en résulte que les droites AB, AC, AD, AE, AF font toutes le même angle avec AF′; donc ces droites coïncident, c'est-à-dire que les points A, B, C, D, E, F sont en ligne droite.

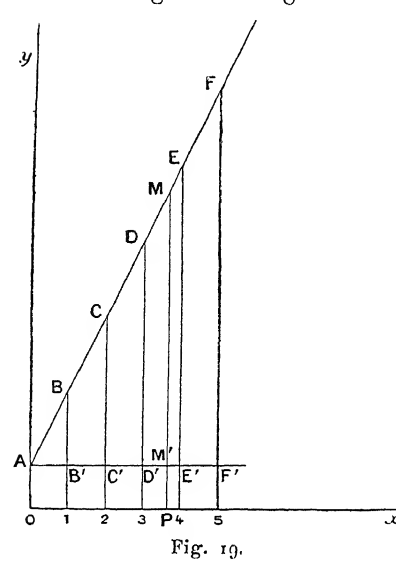


Fig. 19.

Nous allons maintenant faire voir que cette droite AF représente *complètement* la variation de la température dans l'intervalle considéré; c'est-à-dire que *si l'on considère une époque quelconque x, correspondant à l'abscisse* OP, *la température y à cette époque est égale à l'ordonnée* PM *que l'on*

obtient en élevant en P la perpendiculaire à Ox et prenant son point d'intersection M avec AF.

Soit, en effet, M' le point d'intersection de PM avec AF'.

Le triangle AM'M est semblable au triangle AB'B ; on a donc :

$$\frac{M'M}{AM'} = \frac{B'B}{AB'} = 2.$$

D'autre part :

$$PM = PM' + M'M$$
$$OP = AM'.$$

Il en résulte :

$$PM = 2OP + 1,$$

c'est-à-dire, si l'on désigne PM par y et OP par x :

$$y = 2x + 1,$$

l'ordonnée PM représente donc bien la température qui correspond à l'abscisse x.

On voit que *lorsque la variation de la température dans un intervalle donné est représentée algébriquement par un binome du premier degré, elle est représentée graphiquement par une ligne droite;* c'est à cause de cette importante propriété que la fonction y définie par la relation $y = ax + b$ est dite une fonction *linéaire* de x; elle est représentée par une *ligne* (droite).

85. Autres exemples I. — *Représenter graphiquement la fonction y définie par la relation :*

$$y = 4 - 3x,$$

lorsque x varie de -1 à 2.

On peut former le tableau suivant (fig. 20) :

$x = -1$	$y = 7$	point A
$x = 0$	$y = 4$	— B
$x = 1$	$y = 1$	— C
$x = 2$	$y = -2$	— D.

On démontrera comme tout à l'heure que les points A, B, C, D sont en ligne droite. Cette droite rencontre Ox en un point M. Pour ce point M, on a $y = 0$; on doit donc avoir, en désignant par x l'abscisse de M :

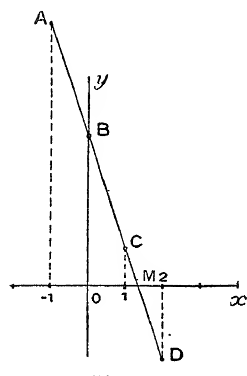


Fig. 20.

$$4 - 3x = 0$$

$$x = \frac{4}{3},$$

c'est ce que l'on vérifie facilement par la comparaison des triangles semblables MC1, MD2.

II. — *Représenter graphiquement la fonction y définie par la relation :*

$$y = -1 - \frac{2}{3}x,$$

lorsque x varie de — 3 à 2.

Nous formerons le tableau suivant :

$x = -3$	$y = -1 + 2 = 1$	point A
$x = -2$	$y = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$	— B
$x = -1$	$y = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$	— C

$$x = 1 \qquad y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \qquad — \quad E$$

$$x = 2 \qquad y = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3} \qquad — \quad F.$$

Les points ABCDEF sont en ligne droite (fig. 21) et cette droite rencontre Ox en un point M dont l'abscisse est $-\frac{3}{2}$; c'est la valeur de x pour laquelle y est égal à zéro

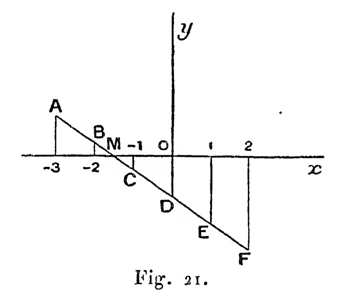


Fig. 21.

86. **Étude générale de la fonction linéaire.** — Nous allons maintenant étudier d'une manière complète les variations de la fonction linéaire, *en faisant varier x de $-\infty$ à $+\infty$*, c'est-à-dire en donnant à x toutes les valeurs possibles, négatives et positives.

Soit la fonction linéaire :

$$y = 2x + 3.$$

La représentation graphique complète des variations de cette fonction s'obtiendra en donnant à x toutes les valeurs possibles, calculant la valeur de y qui correspond à chaque valeur de x, construisant tous les points dont les coordonnées sont les valeurs correspondantes de x et de y, et réunissant ces points par une *courbe*. Nous allons montrer que cette *courbe* est une ligne droite indéfinie[1].

---

1. On oppose quelquefois, en géométrie élémentaire, les mots ligne courbe et ligne droite : une courbe est une ligne qui n'est pas droite. En mathématiques supérieures, on donne le nom de

Considérons d'abord la fonction plus simple définie par la relation :

$$y = 2x.$$

Soit OA une abscisse positive (fig 22); l'ordonnée correspondante AM est positive et égale au double

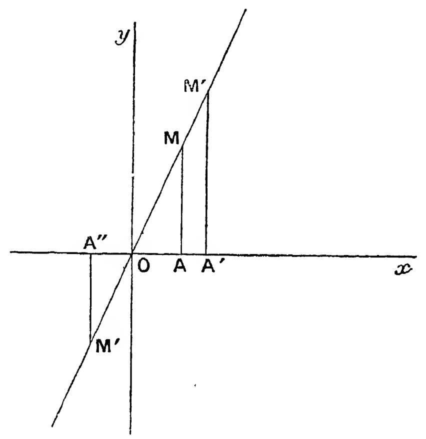


Fig. 22.

de OA; de même à l'abscisse *positive* OA′ correspond une ordonnée *positive* A′M′ égale au double de OA′; à une abscisse *négative* OA″ correspond une ordonnée *négative* A″M″ égale encore au double de OA″. Les triangles rectangles OAM, OA′M′, OA″M″ sont donc semblables comme ayant les côtés de l'angle droit proportionnels :

---

courbe à toute ligne; la ligne droite est *un cas particulier* de la ligne courbe; la ligne brisée est aussi un cas particulier de la ligne courbe.

$$\frac{AM}{OA} = \frac{A'M'}{OA'} = \frac{A''M''}{OA''} = 2.$$

Les angles MOA, M'OA', M''OA'' sont donc égaux, d'où il résulte que les points MM'M'' sont en ligne droite. Cette droite, supposée prolongée indéfiniment, représente complètement la fonction $y=2x$; à tout système de valeurs correspondantes, x, y, correspond un point de la droite, et réciproquement les coordonnées d'un point quelconque de la droite vérifient la relation $y=2x$. On dit que la relation $y=2x$ est l'*équation de la droite* (au lieu de dire plus longuement : l'équation que vérifient les coordonnées d'un point quelconque de la droite). La droite MM' est *la droite d'équation* $y=2x$; on dit aussi, plus brièvement : *la droite :* $y=2x$.

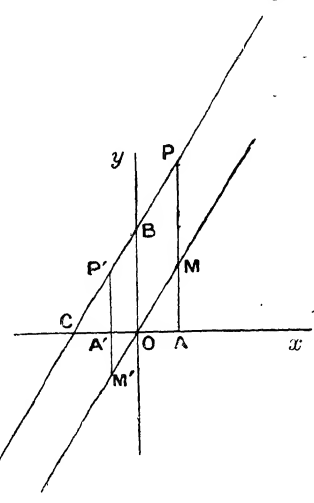


Fig. 23.

Reprenons maintenant la relation plus générale :

$$y = 2x + 3.$$

Soit A un point quelconque de Ox (fig. 23) et AM l'ordonnée de la droite $y=2x$; l'ordonnée de la courbe $y=2x+3$ s'obtiendra en ajoutant 3 à AM, c'est-à-dire en prenant un segment MP égal à 3 (le

sens positif est bien entendu le sens positif sur Oy). De même à un point A′ correspond un point M′ de la droite $y = 2x$ et un point P′ de la courbe $y = 2x + 3$ tel que M′P′ soit égal à 3. Les segments MP, M′P′ étant égaux, parallèles et de même sens, la figure MPP′M′ est un parallélogramme. *Le point* P′ *se trouve donc sur la parallèle à* MM′ *menée par le point* P. Donc tous les points de la courbe $y = 2x + 3$ sont sur cette parallèle ; la courbe cherchée est identique à cette droite.

Remarque. — Pour $x = 0$, la fonction $y = 2x + 3$ se réduit à 3; l'ordonnée correspondante est OB et la figure OBPM est aussi un parallélogramme. La longueur OB est ce qu'on appelle l'*ordonnée à l'origine*. Pour construire la droite $y = 2x + 3$, il est commode en général de construire d'abord le point B; par le point B on mène la parallèle à MM′.

On peut aussi construire le point C où la droite rencontre Ox; c'est le point pour lequel on a $2x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$. Les points B et C étant construits, il suffit de joindre BC pour avoir la droite cherchée.

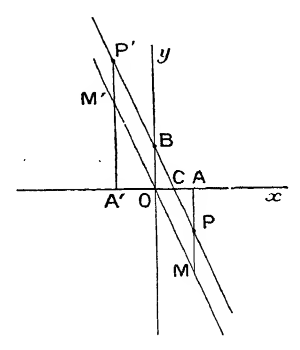


Fig. 24.

87. Exemples. I. — *Construire la droite :*

$$y = -2x + 1.$$

On construira d'abord la droite $y = -2x$, et l'on remarquera que, pour cette droite, y et x sont constamment de signes

contraires ; c'est la droite MM′ (fig. 24); la droite $y = 2x + 1$ est alors PP′, si l'on prend MP et M′P′ égaux à l'unité de longueur; l'ordonnée à l'origine OB est aussi égale à l'unité de longueur. Le point C d'intersection de la droite avec Ox a pour abscisse $\frac{1}{2}$, car pour $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

II. — *Construire la droite représentée par l'équation :*

$$y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

La droite parallèle est M′M (fig. 25); l'ordonnée à l'origine $OB = -2$; l'abscisse à l'origine $OC = -4$.

Remarque. — On voit que l'inclinaison de la droite sur Ox dépend de la grandeur et du signe du

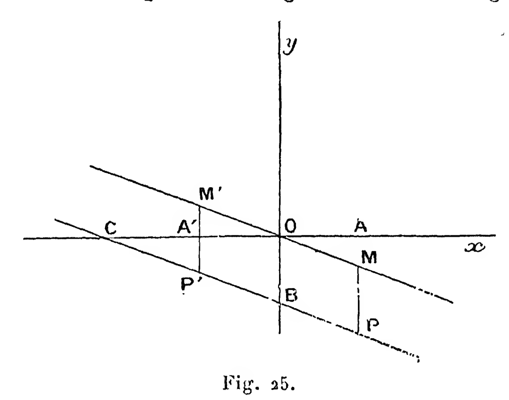


Fig. 25.

coefficient de x dans l'équation; pour cette raison, on donne à ce coefficient le nom de *pente* de la droite; on l'appelle aussi *coefficient angulaire*.

Lorsque ce coefficient est égal à zéro, la droite est parallèle à Ox; car si l'on a $y = 0x + 2$, cela équivaut à $y = 2$; l'ordonnée y a une valeur constante; la droite est telle que BPP′ (fig. 26).

Fig. 26.

Dans le cas où le coefficient angulaire est positif, la fonction y est croissante; elle est décroissante dans le cas où ce coefficient est négatif.

88. — **Détermination du coefficient angulaire de la droite qui joint deux points.** — Considérons une droite, ayant pour équation :

$$y = ax + b$$

et soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), les coordonnées de deux points de cette droite; on a :

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$

d'où, en retranchant :

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

On en conclut, en supposant x_2 différent de x_1 :

$$(1) \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

telle est la formule qui fait connaître le coefficient angulaire d'une droite, lorsque l'on connaît les coordonnées de deux points de cette droite; on peut l'énoncer sous la forme suivante :

Règle. — *Le coefficient angulaire ou pente d'une droite est égal au quotient de la différence des ordonnées de deux de ses points par la différence des abscisses des deux mêmes points pris dans le même ordre.*

Dans le cas où $x_2 - x_1$ est nul, deux points de la droite ont la même abscisse; tous les points de la droite ont évidemment la même abscisse, c'est-à-dire que l'équation de la droite est :

$$x = x_1;$$

cette équation ne renferme pas y.

La droite est parallèle à Oy; son coefficient angulaire est *infini*; le dénominateur de la formule qui le donne est égal à zéro.

Si nous imaginons que l'axe Ox soit horizontal et l'axe Oy vertical, on voit que la pente a est égal au quotient de la différence d'altitude (positive ou négative) $y_2 - y_1$ de deux points par la distance qui sépare les ordonnées de ces deux points, cette distance étant comptée parallèlement à Ox.

89. **Pente. Application à la topographie.** — Lorsque l'on fait le *plan* d'un pays, d'un champ, d'une maison, on représente chaque point par sa projection sur un plan horizontal; c'est-à-dire par le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal; l'on inscrit parfois à côté de chaque point son altitude ou cote, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus d'un certain plan horizontal fixe. La pente d'une droite est alors égale au quotient de la différence des cotes de deux de ses points par la distance de ses projections horizontales. Si l'on a, par exemple, une route rectiligne dont la longueur

est de 3^{km}, dont l'origine est à 250^m au-dessus du niveau de la mer et l'extrémité à 310^m, sa pente est :

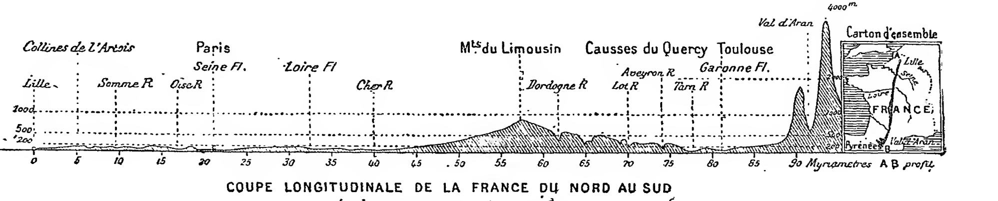
$$\frac{310-250}{3000}=\frac{60}{3000}=\frac{1}{50}.$$

On dira que la pente est $\frac{1}{50}$, ou $\frac{2}{100}$, ou 2 centimètres par mètre, ou 2 p. 100 (2 %). Si l'on prend pour origine des coordonnées l'origine O de la route, pour axe Ox la projection de la route sur le plan horizontal qui passe en O et pour axe Oy la verticale du point O, la section de la route par le plan xOy sera représentée par l'équation :

$$y=\frac{1}{50}x.$$

Lorsque l'on fait ainsi des *coupes* par un plan vertical pour représenter les pentes de la section par ce plan vertical d'une certaine région, on choisit souvent deux unités de longueur différentes pour les abscisses et les ordonnées, *afin d'accentuer les pentes* qui seraient presque insensibles à la vue quand le pays n'est pas très accidenté. Par exemple, on peut convenir de représenter par une abscisse de 1^{cm}, 1^{km} de distance horizontale et par une ordonnée de 1^{cm}, 100^m d'altitude. L'échelle est alors $\frac{1}{100\,000}$ pour les abscisses et $\frac{1}{10\,000}$ pour les ordonnées. Mais, lorsqu'on procède ainsi, il ne faut pas oublier que les pentes réelles sont beaucoup plus faibles que les pentes de la représentation schématique.

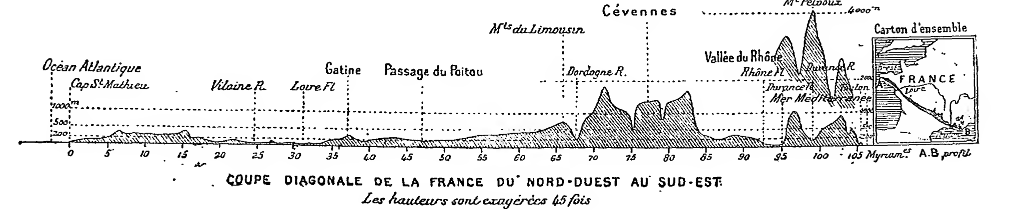
Voici, par exemple (fig. 27 et 28), deux coupes de



COUPE LONGITUDINALE DE LA FRANCE DU NORD AU SUD

Les hauteurs sont exagérées 40 fois

Fig. 27.



COUPE DIAGONALE DE LA FRANCE DU NORD-OUEST AU SUD-EST

Les hauteurs sont exagérées 45 fois

Fig. 28.

la France, empruntées à la *Troisième Année de Géographie*, de P. Foncin (Librairie Armand Colin) dans l'une les hauteurs sont exagérées 40 fois, c'est-à-dire qu'à une hauteur de 1^{km} correspond une ordonnée 40 fois plus grande que l'abscisse qui correspond à une longueur de 1^{km}. Dans la seconde (fig. 28) les hauteurs sont exagérées 45 fois; dans cette dernière à une longueur d'*un kilomètre* correspond une abscisse d'*un dixième de millimètre* tandis qu'à une altitude d'*un kilomètre* correspond une ordonnée de 45 *dixièmes de millimètre*.

On voit ainsi sur un exemple pratique comment il peut être parfois avantageux de prendre des unités différentes pour les abscisses et les ordonnées; mais il faut avoir soin de prévenir expressément; sinon on s'exposerait à de graves erreurs.

90. **Températures médicales.** — Dans beaucoup de maladies, l'observation de la température du malade est un renseignement précieux pour le médecin; il lui est aussi fort utile de savoir si les *variations* en sont plus ou moins rapides. Dans ce but les médecins ont l'habitude de construire des diagrammes de la température dont nous reproduisons un spécimen, d'après une feuille réellement remplie dans un hôpital de Paris (fig. 29). Les températures sont observées chaque matin et chaque soir, à des heures aussi régulières que possible; on porte les époques en abscisses, un côté du quadrillage correspondant à 12^h; on porte les températures en ordonnées; un côté du quadrillage correspond à 2 dixièmes de degré; le point représentatif peut être mis soit sur un des traits horizontaux, soit au centre d'un carré (comme le 6e jour soir dans notre figure), on peut ainsi figurer le dixième de degré, ce qui est l'approximation fournie par les thermomètres médicaux. La pente plus ou moins grande des droites qui joignent les points représentatifs permet de voir d'un coup d'œil si la variation de température a été plus ou moins

Jours de la maladie : 1 2 3 4 5 6 7 8

Température : matin soir matin soir matin soir matin soir matin soir matin soir matin soir matin

41

40

39

38

37

36

Fig. 29.

brusque. Des traits plus forts correspondent aux températures de 37° et de 40°, qui jouent un rôle particulièrement important dans le diagnostic.

Bien entendu, si l'on observait la température du malade à chaque instant, la courbe obtenue différerait notablement de celle qui est figurée; mais cela n'est pas pratiquement possible et la courbe *schématique* que l'on emploie suffit actuellement aux besoins de la médecine.

91. Introduction des accroissements Δy et Δx. — Reprenons la formule fondamentale :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Nous allons la récrire avec une notation différente, ce qui lui donnera une forme nouvelle, qui nous sera fort utile à connaître quand nous étudierons les dérivées.

Expliquons d'abord cette notation.

Soient x_1 et x_2, deux valeurs de l'abscisse, et y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de l'ordonnée. Nous poserons :

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$

ou, ce qui revient au même :

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1.$$

La notation Δx_1 (que l'on énonce : *grand delta* x_1, ou *grand delta de* x_1, ou *delta* x_1) représente la quantité (positive ou négative) qu'il faut ajouter à x_1 pour obtenir x_2; c'est l'*accroissement* de x_1 (le mot accroissement ayant un sens algébrique, c'est-à-dire désignant la quantité que l'on ajoute, qu'elle soit positive ou négative). L'*accroissement correspondant* de

y sera désigné par Δy_1, c'est-à-dire que l'on posera :

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1.$$

La formule qui donne la pente de la droite joignant les deux points considérés prend alors la forme :

$$a = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1},$$

ou plus simplement, en supprimant les indices puisque $(x_1\ y_1)$ sont les coordonnées d'un point *quelconque* de la droite :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ce qui s'exprime ainsi :

THÉORÈME. — *La pente d'une droite est égale au quotient de l'accroissement de l'ordonnée par l'accroissement correspondant de l'abscisse.*

On peut déduire de ce théorème une démonstration nouvelle du théorème de la page 154.

Supposons que l'accroissement Δx soit positif, alors par définition la fonction y est croissante, décroissante ou constante suivant que l'accroissement correspondant Δy est positif, négatif ou nul. Or il est manifeste que, lorsque Δx est positif, a est du même signe que Δy et s'annule avec Δy. Donc la fonction linéaire est croissante, décroissante ou constante suivant que a est *positif, négatif* ou *nul.*

92. **Application au mouvement uniforme.** — Désignons par e_0 l'espace parcouru à l'origine des temps par un mobile animé d'un mouvement uniforme, par e l'espace parcouru à l'époque t et par v

la vitesse ; on aura :

$$e = vt + e_0.$$

C'est l'équation du n° 26 dans laquelle nous employons la lettre e à la place de la lettre x, et supposons $t_0 = 0$.

Traçons deux axes rectangulaires que nous appellerons Ot et Oe, au lieu de les appeler Ox et Oy ; nous porterons les temps en *abscisses*, sur l'axe Ot et les espaces en *ordonnées* parallèlement à l'axe Oe. D'une manière plus précise, ayant choisi une unité de longueur, *que nous supposerons être la même pour les abscisses et les ordonnées*, ayant d'autre part, comme il est nécessaire avant d'écrire l'équation du mouvement uniforme, choisi une origine des temps, une origine des espaces, un sens positif pour les temps, un sens positif pour les espaces, une unité de temps et une unité d'espace, nous faisons correspondre à une époque donnée un point dont l'abscisse est numériquement égale à cette époque et dont l'ordonnée est numériquement égale à l'espace parcouru, *chacune de ces quantités : abscisse, époque, ordonnée, espace, étant mesurée avec l'unité, l'origine et le sens positif qui lui convient.*

Dès lors, si nous désignons par t et e l'abscisse et l'ordonnée nous aurons entre ces nombres la relation :

$$e = vt + e_0,$$

v étant le nombre qui représente la vitesse et e_0 le nombre qui représente l'espace initial. Si l'on appelait, pour un instant, y l'ordonnée (au lieu de e) et x

l'abscisse (au lieu de t) cette équation prendrait la forme :

$$y = vx + e_0,$$

et avec ces notations, on aperçoit immédiatement qu'elle représente une ligne droite. Ainsi, *le mouvement uniforme est représenté par une droite.*

De plus, on voit que la pente de cette droite est v; elle est égale à la *vitesse*. Il importe de remarquer que cette égalité est une conséquence du fait que l'on a pris la *même* unité de longueur pour les abscisses et les ordonnées (voir Exercices 124, 125, 126).

Considérons par exemple un mobile qui parcourt 4^{km} à l'heure, qui se déplace dans le sens positif et qui part d'un point dont la distance à l'origine des espaces[1] est 10^{km}. Nous aurons :

$$e = 4t + 10,$$

les temps t étant exprimés en heures et les espaces en kilomètres. Si nous faisons correspondre une abscisse de 1^{mm} à 1^h et une ordonnée de 1^{mm} à 1^{km}, nous aurons entre les abscisses et les ordonnées la même relation :

$$e = 4t + 10.$$

Nous obtenons ainsi la figure 30.

Pour $t = 5$, nous avons ainsi $e = 30$ et effectivement, à une abscisse de 5^{mm} correspond une ordonnée de 30^{mm}, pour $t = -5$ nous avons $e = -10$, ce

1. Il importe de remarquer que nous ne disons pas ici l'*abscisse* pour éviter toute confusion, car ici nous mesurons les espaces sur l'axe des ordonnées.

qu'il est aisé de vérifier, soit sur la figure, soit dans le problème de mouvement uniforme.

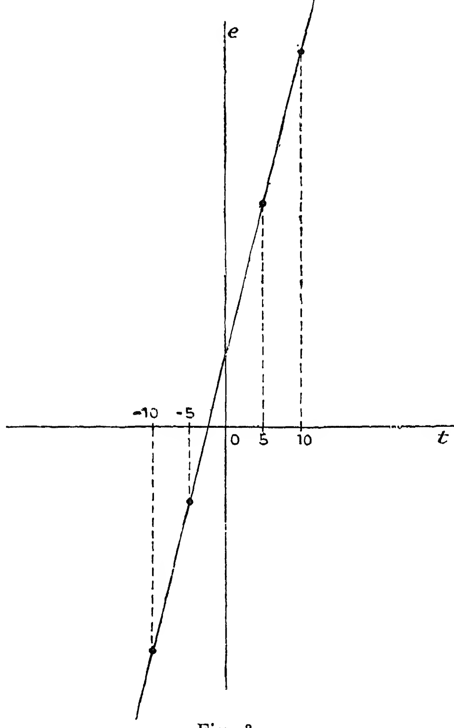


Fig. 30.

Si l'on emploie des notations analogues à celles du paragraphe précédent, on a :

$$v = \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1},$$

Or, $t_2 - t_1$ est l'intervalle de temps qui s'écoule

de l'époque t_1 à l'époque t_2 et $e_2 - e_1$ est l'espace parcouru pendant cet intervalle.

La vitesse est égale au quotient de l'espace parcouru pendant un certain intervalle de temps, par cet intervalle de temps. Ce quotient ne dépend pas de l'intervalle de temps choisi : c'est la définition même du mouvement uniforme.

On peut écrire aussi :

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t},$$

et dire que *la vitesse est égale au quotient de l'accroissement de l'espace par l'accroissement du temps.*

93. **Graphiques des chemins de fer.** — La représentation graphique du mouvement uniforme est utilisée par l'État et les Compagnies de chemins de fer pour fournir à leurs agents, sous une forme commode, le tableau de la marche des trains sur une ligne. On admet, pour simplifier, qu'entre deux stations, la marche d'un train peut être regardée comme uniforme; pendant les stationnements, l'espace ne varie pas, tandis que le temps augmente d'une quantité égale à la durée du stationnement; un stationnement sera donc représenté par un segment de droite parallèle à l'axe Ot. Supposons, par exemple, que nous fassions correspondre 1^{mm} à 1^{m} et 1^{mm} à 1^{km} (la vitesse évaluée en kilomètres à la minute sera alors égale à la pente).

Nous avons représenté sur la figure 31 la marche de deux trains qui partent en même temps (à l'origine des temps) de la station choisie comme origine des espaces.

La marche du premier, qui est un express, est représentée par la ligne OABCD; il parcourt d'abord 30^{km} en 20^{m}; cette première partie de son trajet est représentée par la droite OA, arrivé à la

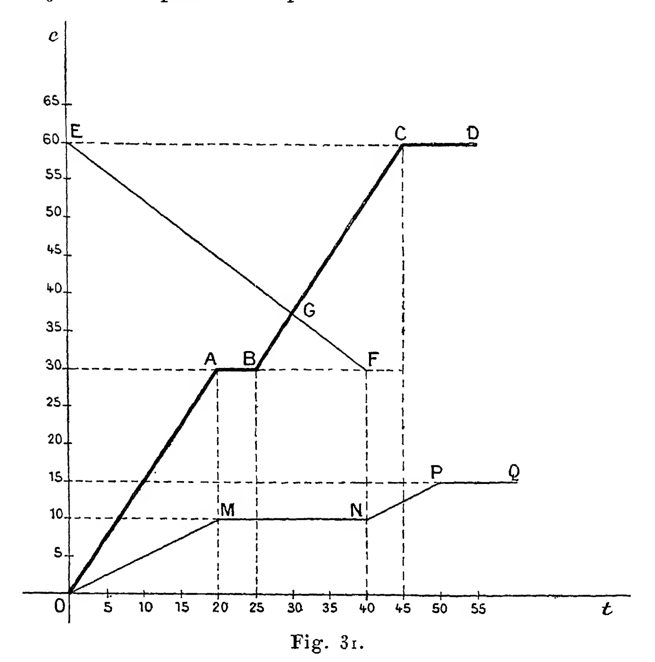


Fig. 31.

station qui se trouve à 30^{km} de son point de départ, il y séjourne 5^{m}, ce qui est représenté par le segment AB; car, pendant ces 5^{m} l'espace ne varie pas; il parcourt ensuite 30 autres kilomètres en 20^{m}; de sorte que 45^{m} après son départ il se trouve à 60^{km} de son point de départ, ce qui est figuré par le point C dont l'abscisse est 45 et l'ordonnée 60;

il séjourne ensuite 10^m à cette nouvelle station, etc.

Le tracé OMNPQ représente la marche d'un train de marchandises, dont la vitesse est beaucoup plus faible et les stationnements plus longs La droite EF représente la marche d'un train qui va en sens inverse des précédents; il part à l'origine des temps d'un point situé à 60^{km} de l'origine des espaces (point E) et arrive 40^m après à la station située à 30^{km} de cette origine (point F). Ce train croise l'express considéré en premier lieu, car les lignes qui les représentent se coupent en un point G. L'abscisse de ce point fait connaître l'époque de ce croisement et son ordonnée fait connaître la distance à l'origine du point de croisement.

Les figures 32 et 33 représentent les graphiques de chemins de fer tels qu'ils existent réellement; les dimensions de ce livre ne nous ont pas permis de les reproduire intégralement (de minuit à minuit); la figure 32 donne la portion d'un graphique qui s'étend de minuit à 5^h du matin et la figure 33 la portion d'un autre graphique qui s'étend de midi à 5^h du soir. A chaque station correspond une ligne parallèle à l'axe des abscisses; les écartements de ces lignes sont proportionnels aux distances des stations entre elles, distances qui sont indiquées dans la colonne de gauche. Les parallèles à l'axe des ordonnées correspondent aux époques; ces parallèles équidistantes correspondent aux quarts d'heure, les traits des heures étant plus forts, de plus, de petits traits parallèles aux précédents, mais qui ne sont pas prolongés pour ne pas trop charger la figure, divisent chaque quart d'heure en 3 intervalles égaux (de 5 minutes chacun par conséquent).

La marche de chaque train est représentée par une ligne inclinée; la force du trait et la nature de son pointillé permettent de distinguer les diverses espèces de trains; le numéro de chaque train est inscrit à côté du trait qui le représente. Par exemple, sur la figure 32 on voit que le

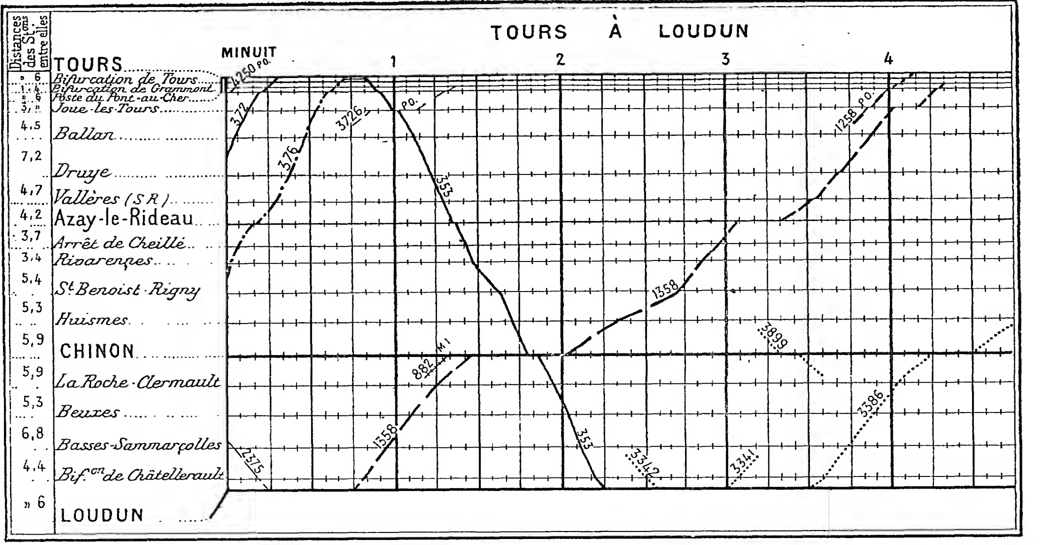

TOURS À LOUDUN
MINUIT
1
2
3
4
Distances des St.ons entre elles
TOURS
Bifurcation de Tours
Bifurcation de Grammont
Poste du Pont-au-Cher
Joue-les-Tours
Ballan
Druye
Vallères (S R)
Azay-le-Rideau
Arrêt de Cheillé
Rivarennes
St Benoist-Rigny
Huismes
CHINON
La Roche-Clermault
Beuxes
Basses-Sammarçolles
Bif.on de Châtellerault
LOUDUN
» 6
1.4
» 6
3,»
4.5
7,2
4,7
4,2
3,7
3,4
5,4
5,3
5,9
5,9
5,3
6,8
4,4
» 6
4250 P.O.
372
376
3726
P.O.
353
1258 P.O.
1358
882 M.I
1358
2375
353
3342
3341
3899
3386

Fig. 32.

train 1358 part de Loudun à minuit 45^m, arrive à Chinon vers $1^h 28^m$, en repart à 2^h, arrive à Azay à $3^h 4^m$, en repart à $3^h 20^m$, etc; pendant qu'il est garé à Chinon, le train 353 (dont la marche est plus rapide et qui va en sens inverse) peut traverser cette station (la ligne étant à voie unique). Nous laissons à l'élève le soin d'étudier lui-même les autres particularités des figures 32 et 33.

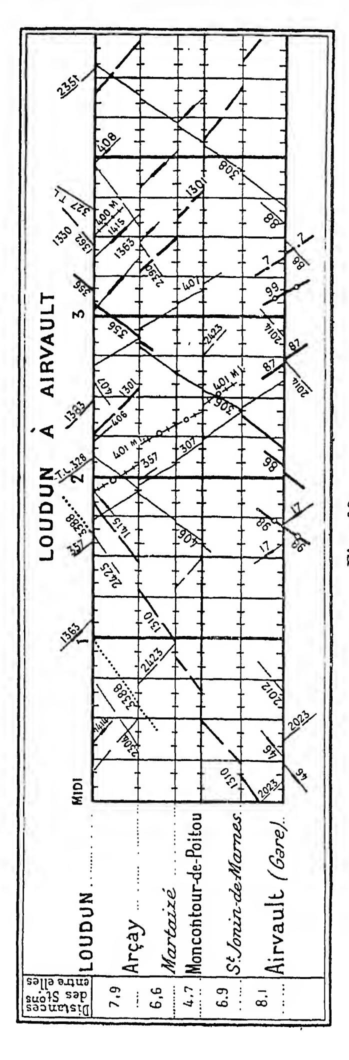


Fig. 33.

EXERCICES
SUR
LE CHAPITRE V

103. — On a observé les températures suivantes :

Midi	10°
2^h.	11°,5
4^h.	8°
6^h.	5°
8^h	3°
10^h.	0°,5
Minuit. . .	— 0°,5
2^h	— 1°

Représenter graphiquement la variation de

la température, en faisant correspondre 1^{cm} à 1^{h} et 1^{cm} à 1°.

104. — Effectuer la même représentation graphique, en faisant correspondre 2^{mm} à 1^{h} et 1^{mm} à 1°.

105. — Effectuer la même représentation graphique en faisant usage de papier quadrillé et faisant correspondre un côté du quadrillage à 1^{h} et un côté à 2°.

106. — Représenter graphiquement la température d'un malade d'après les observations suivantes :

	Matin.	Soir.
	—	—
28 juin	36°,9	38°
29 —	37°,5	38°,5
30 —	37°,4	39°
1er juillet	39°,1	39°,5
2 —	39°	38°,8
3 —	37°,7	38°
4 —	37°	37°,6

107. — Représenter graphiquement les températures indiquée dans la note au bas de la page 170, en faisant correspondre 5^{cm} à 1^{m} et 5^{cm} à 1°.

108. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = 2x - 1$$

$$y = -3x + 2$$

$$y = \frac{x}{3} - 2$$

en prenant comme unité le centimètre.

109. — Même question, en prenant pour unité le millimètre.

110. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8}$$

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{5}$$

$$y = -\frac{x}{\ } + \frac{2}{\ }$$

111. — Même question en prenant pour unité le centimètre.

112. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = -2x + 400$$
$$y = -3x + 250$$
$$y = 3\frac{x}{4} - 2000$$

en prenant pour unité le dixième de millimètre.

113. — Représenter graphiquement les deux droites :

$$y = 2x + 4$$
$$y = -3x + 7,$$

en prenant pour unité le centimètre; calculer et mesurer les coordonnées de leur point commun, c'est-à-dire du point dont les coordonnées x, y vérifient les deux équations.

114. — Même question pour les droites :

$$y = \frac{1}{4}x + 15$$
$$y = 2x - 3.$$

On prendra pour unité le millimètre.

115. — Résoudre les deux questions précédentes en faisant usage de papier quadrillé.

116. — Calculer les coordonnées du point commun aux deux droites :

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'.$$

Discuter.

117. — Construire les droites représentées par les équations :

$$x = 2y + 5$$
$$x = 3y - 4$$
$$x = 2$$
$$x = -\frac{y}{5} + \frac{2}{3}.$$

118. — Construire les droites représentées par les équations :

$$2x + 3y = 5$$
$$4x - 5y - 2 = 0$$
$$3x - 2y + 4 = 0$$
$$3x - 5 = 0$$
$$2y + 3 = 0.$$

en prenant pour unité le demi-centimètre.

119. — Dans quel cas les droites représentées par les équations :

$$ax + by = c$$
$$ax' + b'y = c'$$

sont-elles parallèles?

120 — Quelle est la pente de la droite :

$$ax + by = c.$$

121. — L'horaire du rapide de jour de Paris à Marseille pendant l'hiver 1902-1903 était le suivant :

Distances de Paris en kilomètres.	Stations.	Arrivée.	Départ.
	Paris		9^h 20
155	Laroche	11^h 50	11^h 55
315	Dijon	2^h 14	2^h 26
440	Mâcon	4^h 1	4^h 4
512	Lyon	5^h 4	5^h 19
618	Valence	6^h 45	6^h 48
742	Avignon	8^h 25	8^h 35
764	Tarascon	8^h 54	9^h 3
863	Marseille	10^h 21	

Représenter graphiquement la marche de ce train en prenant pour unité de temps 5^m, pour unité d'espace le myriamètre et pour unité de longueur le millimètre pour les abscisses et les ordonnées.

122. — Résoudre la question précédente en faisant usage de papier quadrillé.

123. — Résoudre la même question en faisant correspondre une abscisse de 1^{cm} à 1^h et une ordonnée de $\frac{1}{8}$ de millimètre à 1^{km}.

124. — Calculer la vitesse qu'a le train précédent dans chacune des sections qu'il parcourt et mesurer les pentes des droites correspondantes dans les diverses représentations graphiques.

125. — Calculer, avec l'approximation que comporte la figure, les vitesses des trains représentés sur la figure 32, entre les diverses stations du parcours.

126. — Même question pour la figure 33; calculer de plus les époques et les distances aux stations voisines des croisements des trains en dehors des stations.

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ. ÉTUDE DU TRINOME

I. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

94. **Définitions.** — Nous savons qu'on appelle équation du second degré à une inconnue x une équation telle que, tous les termes ayant été transposés dans le premier membre et les termes semblables ayant été réduits, le premier membre est un polynome du second degré en x. Telles sont les équations :

$$3 + 5x^2 - x = 0$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3}x - x^2 = 0$$

$$mx^2 - px + 3x^2 - 4 = 0$$

$$m - nx^2 + 2px - m^2 - p^4 = 0.$$

On a l'habitude d'ordonner le premier membre de l'équation suivant les puissances décroissantes de x, en réunissant en un seul tous les termes qui

renferment x au même degré. Les équations précédentes s'écriront ainsi :

$$5x^2 - x + 3 = 0$$
$$-x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{3}{2} = 0$$
$$(m + 3)x^2 - px - 4 = 0$$
$$-nx^2 + 2px + (m - m^2 - p^4) = 0.$$

Une équation du second degré a donc *trois termes*; son premier membre est un *trinome du second degré*. Le *premier* terme est le terme en x^2; le *second* terme est le terme en x; le *dernier* terme est le terme indépendant de x ou *terme constant* Par exemple, dans l'équation :

$$(m + 3)x^2 - (2 - n + p)x + m - n = 0$$

le *premier terme* est $(m + 3)x^2$; le *second terme* est $-(2 - n + p)x$; le *dernier terme* est $m - n$.

Dans l'équation :

$$-3x - 1 + x^2 = 0,$$

le premier terme est x^2, le second $-3x$ et le dernier -1; car cette équation ordonnée s'écrirait :

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Dans l'équation :

$$x^2 - 1 = 0,$$

le *premier terme* est x^2; le *second terme* n'existe pas; le *dernier terme* est -1.

On écrit souvent l'équation *générale* du second degré sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

c'est-à-dire que l'on désigne par a le coefficient du premier terme, par b le coefficient du second terme, et par c le terme constant. Pour que l'équation soit bien du second degré, il est nécessaire de supposer que le coefficient a est différent de zéro; nous ferons cette hypothèse. Mais de même que, dans l'équation du premier degré à coefficients littéraux, il peut arriver que le coefficient du premier terme *devienne* nul pour des valeurs particulières de ces lettres, il y aura lieu d'étudier plus loin ce qui arrive, lorsque dans l'équation du second degré le coefficient du premier terme *devient* nul. Mais, pour l'instant, nous supposons essentiellement a différent de zéro; les coefficients b et c peuvent être nuls ou différents de zéro; nous étudierons d'abord le cas particulier où l'on a $b = 0$.

95. **Cas où le coefficient du second terme est nul.** — Soit l'équation du second degré :

$$2x^2 - 8 = 0.$$

On peut l'écrire successivement sous les formes équivalentes :

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4.$$

Il s'agit donc de trouver un nombre x dont le carré soit égal à 4. Nous savons que 2 est le seul nombre positif dont le carré est égal à 4; je dis que -2 est le seul nombre négatif dont le carré est égal à 4; en effet, a étant positif, le carré de $-a$ est égal au carré de a; il n'est donc égal à 4 que si $a^2 = 4$,

c'est-à-dire si $a=2$. L'équation proposée admet donc *deux solutions;* ou, comme on dit aussi, *deux racines :* la racine 2 et la racine -2.

Au lieu d'écrire :

$$x=+2$$
$$x=-2,$$

on écrit souvent la formule unique :

$$x=\pm 2,$$

que l'on énonce : *x égale plus ou moins deux;* c'est-à-dire : *l'équation proposée est vérifiée que x soit égal à $+2$ ou à -2.*

Soit encore l'équation :

$$3x^2-5=0.$$

On en déduit :

$$x^2=\frac{5}{3};$$

et l'on voit que x doit être tel que son carré soit égal à $\frac{5}{3}$, il existe un nombre positif et un seul dont le carré est $\frac{5}{3}$; on le représente par $\sqrt{\frac{5}{3}}$ et l'on apprend en arithmétique à le calculer avec autant d'approximation que l'on veut. Le nombre négatif $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ est le seul nombre négatif dont le carré soit égal à $\frac{5}{3}$; l'équation proposée a donc deux racines que l'on peut représenter par la formule unique :

$$x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Considérons maintenant l'équation :

$$2x^2 + 5 = 0.$$

S'il existe un nombre x vérifiant cette équation, on doit avoir :

$$x^2 = -\frac{5}{2},$$

c'est-à-dire que le carré de x doit être égal au nombre négatif $-\frac{5}{2}$; or, le carré d'un nombre est toujours positif, que ce nombre soit positif ou négatif; *il n'y a donc aucun nombre dont le carré soit égal à* $-\frac{5}{2}$; on en conclut que *l'équation proposée n'a pas de racines.*

Soit enfin l'équation :

$$3x^2 = 0.$$

Le produit de x^2 par 3 étant nul, on doit avoir :

$$x^2 = 0,$$

et par suite $x = 0$, puisque 0 est le seul nombre dont le carré est égal à zéro. L'équation proposée admet donc la racine unique $x = 0$.

On convient de dire que cette racine est *double;* nous ne pouvons expliquer complètement la raison de cette dénomination; contentons-nous d'observer que, x^2 étant le produit de deux facteurs égaux à x, si x est égal à zéro, ces deux facteurs sont nuls, de sorte que le produit a *une double raison* pour s'annuler.

Nous pouvons résumer comme il suit l'étude que nous venons de faire.

THÉORÈME. — *Soit :*

$$ax^2 + c = 0$$

une équation du second degré sans second terme, dans laquelle on suppose essentiellement $a \neq 0$. *Si les coefficients a et c sont de signes contraires, l'équation admet deux racines données par la formule*

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}},$$

dans laquelle $\frac{-c}{a}$ *est un nombre positif dont l'arithmétique enseigne à extraire la racine carrée Si les coefficients c et a sont de même signe, l'équation n'a pas de racines. Si le coefficient c est nul, l'équation admet la racine double* $x = 0$.

96. **Résolution de l'équation générale.** — Considérons maintenant l'équation générale

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

dans laquelle nous supposons essentiellement le coefficient a différent de zéro, sans faire aucune autre hypothèse.

L'équation (1) est équivalente à l'équation suivante, obtenue en multipliant les deux membres par $4a$:

$$(2) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

ou, en ajoutant b^2 aux deux membres :

$$(3) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Le succès de la méthode employée tient à ce que le premier membre de l'équation (3) est le carré de $2ax + b$; de telle sorte que cette équation (3) peut s'écrire :

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

On est ainsi conduit à un problème tout à fait analogue à celui que nous avons résolu dans le précédent paragraphe; il s'agit de déterminer x, sachant que le carré de l'expression $2ax + b$ est égal à $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac$ est positif, $2ax + b$ devra être égal à $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$; si $b^2 - 4ac$ est négatif, le problème est impossible; si $b^2 - 4ac$ est nul, $2ax + b$ doit être nul. On a donc, en supposant $b^2 - 4ac \geqslant 0$,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = - b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{- b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette dernière formule fait connaître les deux racines de l'équation du second degré au moyen des coefficients; ces racines sont distinctes si $b^2 - 4ac$ est positif; elles sont *égales* si $b^2 - 4ac = 0$; il n'y a alors qu'*une* racine, que l'on considère comme *double*; enfin si $b^2 - 4ac$ est négatif, les racines n'existent pas; la formule qui les donne n'a plus de sens, puisque l'on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.

Nous donnerons à la quantité $b^2 - 4ac$ le nom de *discriminant* de l'équation [1].

---

1. D'après la théorie générale des formes quadratiques en algèbre on appellerait discriminant la quantité $4ac - b^2$ ou plutôt

97. **Applications**. I. — Résoudre l'équation :

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

On peut appliquer la formule, en remplaçant a par 2, b par -5 et c par 3; on obtient ainsi :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}.$$

Les deux racines sont donc :

$$\frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

et

$$\frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

On aurait pu, à titre d'exercice, appliquer à l'équation particulière proposée la méthode générale qui a servi à établir la formule; multiplions par $4a$, c'est-à-dire par 8; il vient :

$$16x^2 - 40x = -24.$$

Ajoutons b^2, c'est-à-dire 25; il vient :

$$16x^2 - 40x + 25 = 25 - 24$$
$$(4x - 5)^2 = 1$$
$$4x - 5 = \pm 1$$
$$4x = 5 \pm 1,$$

d'où l'on tire les mêmes valeurs pour les racines.

---

son quart; mais, d'autre part, c'est la quantité $b^2 - 4ac$ qui a été introduite par Gauss dans ses recherches célèbres sur les formes quadratiques à indéterminées entières. Dans ces conditions, nous pensons qu'il n'y a pas d'inconvénient à adopter le nom de discriminant pour la quantité $b^2 - 4ac$; on appelle aussi parfois discriminant le quart de cette quantité (c'est-à-dire $b'^2 - ac$; voir n° 98); dans toutes les questions où le signe seul intervient, il est sans importance de préciser si l'on prend $b^2 - 4ac$ ou son quart.

II. — Résoudre l'équation :

$$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times \frac{16}{3} = 0.$$

L'équation a donc une racine double :

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

III. — Résoudre l'équation :

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16;$$

l'equation proposée n'a pas de racines.

IV. — *Résoudre l'équation :*

$$a^2x^2 - (a^2 + b^2)x + b^2 = 0.$$

Le discriminant est :

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2.$$

On a donc :

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2a^2},$$

ce qui donne les deux racines :

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2a^2} = 1$$

$$x'' = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

98. **Cas où la formule se simplifie** — Dans le cas où le coefficient b est le double d'un nombre entier, il est commode de poser $b = 2b'$, b' désignant la moitié de b; la formule devient alors, en remarquant que le carré du double d'un nombre est égal au quadruple de ce nombre :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Indiquons aussi la formule suivante, souvent utile. L'équation du second degré étant donnée sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0,$$

on l'écrit :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{p^2}{4} - q > 0$:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

c'est-à-dire :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

II. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

99. **Formation d'une équation ayant deux racines données.** — Désignons par x' et x'' deux nombres donnés; est-il possible de former une équation du second degré ayant pour racines les nombres x' et x''? Nous allons voir que la réponse à cette question est affirmative. Dans ce but, désignons par a un nombre quelconque non nul et considérons l'équation :

$$a(x - x')(x - x'') = 0.$$

C'est une équation du second degré; d'autre part, pour que le produit des trois facteurs a, $x - x'$, $x - x''$ soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces facteurs soit nul; comme a est différent de zéro, il faut donc que $x - x'$ soit nul, c'est-à-dire que $x = x'$, *ou bien* que $x - x''$ soit nul, c'est-à-dire que $x = x''$. L'équation que nous avons formée admet donc pour racines les nombres x' et x'', et n'admet pas d'autres racines (ce que l'on aurait pu prévoir, puisque l'on sait qu'une équation du second degré admet au plus deux racines).

Soit par exemple $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = \frac{1}{3}$. Prenons $a = 6$, afin de faire disparaître les dénominateurs; nous formerons l'équation :

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

ou, en développant :

Soit encore $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = -3$; prenons $a = 2$, nous aurons l'équation :

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$2x^2 + 5x - 3 = 0.$$

Reprenons l'équation générale :

$$a(x - x')(x - x'') = 0.$$

Si nous la développons, nous obtenons :

$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' = 0.$$

Les coefficients sont : a, $-a(x' + x'')$, $ax'x''$, d'où la règle suivante.

Règle. — *Pour former une équation du second degré admettant pour racines les nombres x' et x'', on prend arbitrairement le premier coefficient a; le second coefficient est égal au produit de $-a$ par la somme des racines $x' + x''$ et le dernier coefficient est égal au produit de a par le produit des racines $x'x''$.*

Dans le cas particulier où $x' = x''$, l'équation que l'on obtient est :

$$a(x - x')^2 = 0$$
$$ax^2 - 2ax'x + ax'^2 = 0,$$

et l'on constate aisément qu'elle admet la racine *double* $x = x'$; cette racine est regardée comme double parce qu'elle annule *doublement* l'expression $a(x - x')^2$, vu qu'elle annule les *deux* facteurs $x - x'$ de cette expression.

100. **Relations entre les coefficients et les racines.** — Nous allons démontrer que, réciproquement, si l'on donne *a priori* une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

admettant des racines, que l'on désignera par x' et x'', les coefficients b et c sont donnés par les formules :

$$b = -a(x' + x'')$$
$$c = ax'x''.$$

Ceci revient à dire que l'équation donnée est identique avec l'équation que nous savons former ayant même premier coefficient a et admettant les mêmes racines x' et x''.

La vérification est facile ; on a :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

d'où, immédiatement :

$$a(x' + x'') = -b.$$

On a d'ailleurs :

$$x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

La vérification est donc complète ; elle subsiste dans le cas où $x' = x''$, c'est-à-dire où $b^2 - 4ac$ est nul.

On en conclut que *deux équations du second degré ayant les mêmes racines ont leurs coefficients proportionnels;* car, si l'on désigne par a', b', c', les coefficients d'une autre équation ayant aussi pour racines x' et x'', on a :

$$b' = -a'(x' + x'')$$
$$c' = a'x'x'',$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Réciproquement, si deux équations ont les coefficients proportionnels, elles ont les mêmes racines.

101. **Signes des racines.** — Les relations entre les coefficients et les racines peuvent s'écrire :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x'x'' = \frac{c}{a}$$

ce qui s'énonce ainsi :

Théorème — *Lorsqu'une équation du second degré admet des racines, la somme de ces racines est égale au quotient changé de signe du second coefficient par le premier; le produit de ces racines est égal au quotient du dernier coefficient par le premier.*

On peut déduire de là une règle permettant d'obtenir le signe des racines sans résoudre l'équation. En effet, si le produit des racines est négatif, on peut en conclure que l'une est positive et l'autre négative; si le produit est positif, les deux racines sont de même signe; elles sont toutes deux posi-

tives ou toutes deux négatives suivant que leur somme est positive ou négative.

Mais il ne faut pas oublier, avant de rechercher le signe des racines, de s'assurer d'abord que ces racines existent, c'est-à-dire que $b^2 - 4ac$ est positif (ou nul). On peut d'ailleurs, à ce sujet, faire l'importante remarque suivante : dans le cas où $\frac{c}{a}$ est négatif, c et a sont de signes contraires, d'où l'on conclut que $4ac$ est aussi négatif; il en résulte que $b^2 - 4ac$ est forcément positif, puisque b^2 et $-4ac$ sont positifs.

102. **Cas où *a* est nul.** — Nous venons d'étudier les cas où le coefficient a du premier terme n'est pas nul; pour nous rendre compte de ce qui se passe quand il devient nul, supposons d'abord qu'il soit *très petit* (voir p. 155) et considérons pour fixer les idées l'équation :

$$\frac{1}{1000}x^2 + 2x - 3 = 0.$$

La formule simplifiée donne :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 0,003}}{0,001}.$$

Or on a :

$$\sqrt{1,003} = 1,00149...$$

Les deux racines sont donc :

$$x' = \frac{-1 + 1,00149...}{0,001} = 1,49...$$

$$x'' = \frac{-1 - 1,00149}{0,001} = -2001,49...$$

On voit que l'une des racines est très voisine de $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire de la solution de l'équation du premier degré obtenue en supprimant de terme en x^2 dans l'équation donnée ; quant à la seconde racine, elle est très grande en valeur absolue. Si l'on avait pris l'équation :

$$\frac{1}{1\,000\,000}x^2 + 2x - 3 = 0,$$

on aurait trouvé :

$$\begin{cases} x' = 1,499\ldots \\ x'' = -2\,000\,001,49\ldots \end{cases}$$

la racine x' se rapprochant de plus en plus de $\frac{3}{2}$ et la valeur absolue de x'' étant de plus en plus grande.

On est ainsi conduit à conjecturer que lorsque le coefficient a devient nul, b restant différent de zéro, l'une des racines devient égale à la solution de l'équation du premier degré :

$$bx + c = 0,$$

et l'autre racine *disparaît en devenant infinie*, c'est-à-dire devient de plus en plus grande en valeur absolue à mesure que la valeur absolue de a devient plus petite.

Il est aisé de justifier cette conjecture en utilisant les relations entre les coefficients et les racines.

On a, en effet :

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}.$$

Si a devient nul sans que b devienne nul, la

valeur absolue de la somme $x' + x''$ devient infinie (c'est-à-dire d'autant plus grande en valeur absolue que a est plus petit).

L'une au moins des racines devient donc très grande en valeur absolue.

D'autre part on a :

$$x'x'' = \frac{c}{a},$$

et, par suite, en écartant le cas où c serait nul, auquel cas l'équation a visiblement une racine nulle :

$$\frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{-b}{c},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{-b}{c}.$$

Il n'est donc pas possible que x' et x'' deviennent *tous les deux* très grands en valeur absolue ; car s'il en était ainsi $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$ deviendraient extrêmement petits tous deux en valeur absolue, et leur somme ne pourrait pas être égale à $\frac{-b}{c}$. Il n'y a donc qu'une racine qui devient infinie, si on la désigne par x'', $\frac{1}{x''}$ est d'autant plus petit que a est lui-même plus petit. Or, on a :

$$\frac{1}{x'} = \frac{-b}{c} - \frac{1}{x''}.$$

Donc lorsque a devient très petit $\frac{1}{x'}$ devient très

voisin de $\frac{-b}{c}$, c'est-à-dire que x' se rapproche de $\frac{-c}{b}$ à mesure que a se rapproche de zéro. Pour $a=0$, on a donc bien les conclusions annoncées :

$$x' = -\frac{c}{b}; \quad x'' = \infty.$$

Dans le cas où b est nul en même temps que a l'équation se réduit à :

$$c = 0,$$

et si c n'est pas nul, n'a aucune racine. On voit aisément que, dans ce cas, *les deux* racines deviennent infinies, c'est-à-dire sont d'autant plus grandes en valeur absolue que a et b sont plus petits, car leur produit $\frac{c}{a}$ devenant très grand en valeur absolue, l'une au moins est très grande, et la somme :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{-b}{c},$$

devenant très petite en valeur absolue, on en conclut que l'on ne peut pas supposer qu'*une seule* des deux racines x' et x'' soit très grande

Enfin si a, b, c sont nuls tous trois l'équation est évidemment indéterminée.

103. **Résumé de la discussion.** — On peut résumer les deux paragraphes précédents dans le tableau suivant :

DISCUSSION DE L'ÉQUATION

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$a \neq 0$	$\frac{c}{a} < 0$			2 racines, l'une positive, l'autre négative.
	$\frac{c}{a} > 0$	$b^2 - 4ac > 0$	$-\frac{b}{a} > 0$;	2 racines positives.
			$-\frac{b}{a} < 0$;	2 racines négatives.
		$b^2 - 4ac = 0$		1 racine double $x = \frac{-b}{2a}$.
		$b^2 - 4ac < 0$		pas de racines.
	$c = 0$;			1 racine nulle; 1 racine égale à $\frac{-b}{a}$.
$a = 0$, $b \neq 0$				1 racine infinie. 1 racine égale à $\frac{-c}{b}$.
$a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$				2 racines infinies; équation impossible.
$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$				Équation indéterminée; tout nombre est racine.

III. ÉTUDE DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ

104. **Définitions et notations.** — On donne le nom de trinome du second degré à l'expression :

$$ax^2 + bx + c,$$

les expressions : *premier terme*, etc., ont le même sens que pour l'équation du second degré. Nous désignerons fréquemment le trinome par y; c'est-à-dire que nous poserons :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Nous le désignerons aussi quelquefois par l'une des notations $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ [que l'on énonce : petit f de x, grand F de x, φ de x]. La lettre f est la première lettre du mot *fonction* et les notations $f(x)$,.. sont employées pour désigner une *fonction de* x L'avantage principal de cette dernière notation est le suivant Si l'on pose :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

et que l'on remplace dans le trinome x par une autre lettre, ou par un nombre quelconque, le résultat obtenu sera désigné en remplaçant la lettre x dans $f(x)$ par cette lettre ou par ce nombre. Ainsi, l'on a :

$$\begin{aligned}
f(z) &= az^2 + bz + c \\
f(\lambda) &= a\lambda^2 + b\lambda + c \\
f(10) &= 100a + 10b + c \\
f(-1) &= a - b + c \\
f(\cos y) &= a\cos^2 y + b\cos y + c \\
f(tgu) &= atg^2u + btgu + c.
\end{aligned}$$

Dans l'étude du trinome du second degré, il y a souvent lieu d'introduire les racines de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

c'est-à-dire *les racines de l'équation obtenue en égalant le trinome à zéro*. Nous dirons, pour abréger,

que ces racines sont les *zéros* du trinome[1] et nous les désignerons généralement par x' et x''.

Lorsque l'on a :

$$b^2 - 4ac < 0,$$

le trinome a deux zéros distincts, si :

$$b^2 - 4ac = 0,$$

le trinome a un zéro double; enfin si l'on a :

$$b^2 - 4ac < 0,$$

le trinome n'a pas de zéro.

Dans l'étude du trinome, *nous supposerons essentiellement que le coefficient a du premier terme n'est pas nul,* de sorte que les cas précédents sont les seuls qui puissent se présenter.

105. **Formes canoniques du trinome.** — Nous donnerons le nom de *formes canoniques du trinome* à des formes particulières que l'on peut donner au trinome et sur lesquelles ses propriétés essentielles sont mises en évidence. Nous obtiendrons une forme canonique générale, qui donnera trois formes particulières, suivant que le discriminant est négatif, nul ou positif. Nous ne nous appuierons pas sur les résultats obtenus pour l'équation du second degré, de sorte que nous arriverons par une autre voie aux résultats des nos 96, 99, 100.

1° **Forme canonique générale.** — On a, puisque l'on suppose que a n'est pas nul :

1. D'une manière générale, on appelle *zéros* d'un polynome (ou d'une fonction quelconque) les *racines* de l'équation obtenue en égalant à zéro ce polynome (ou cette fonction).

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right],$$

c'est-à-dire :

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Telle est la forme canonique que l'on peut toujours donner au trinome : *le trinome est égal au produit du coefficient a de son premier terme par la somme du carré d'une fonction linéaire de x, dans laquelle le coefficient de x est égal à 1, et d'une constante.* Ce résultat joue un rôle essentiel dans l'étude de la représentation graphique du trinome, comme nous le verrons bientôt.

2° **Cas où le discriminant est négatif.** — Supposons que l'on ait :

$$b^2 - 4ac < 0,$$

c'est-à-dire :

$$4ac - b^2 > 0,$$

il existe alors un nombre positif m vérifiant la relation :

$$m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2},$$

et la relation (1) peut s'écrire :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right].$$

Le trinome est alors égal au produit du coefficient a de son premier terme par la somme de deux carrés. Il est clair que, dans ce cas, *le trinome ne peut pas s'annuler*, car un carré est toujours positif; la somme de deux nombres positifs ne peut être nulle que

s'ils sont nuls tous deux, et ici m^2 ne saurait être nul.

3° **Cas où le discriminant est nul.** — Lorsque l'on a :

$$b^2 - 4ac = 0,$$

la relation (1) devient :

$$(3) \qquad a^2x + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

ou, si l'on pose :

$$-\frac{b}{2a} = x'$$

$$(3)' \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x')^2.$$

Le trinome est égal au produit par a du carré d'un binome du premier degré en x : $x - x'$.

4° **Cas où le discriminant est positif.** — La formule (1) s'écrit alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

Nous avons entre crochets la différence de deux carrés; nous pouvons les décomposer en un produit de deux facteurs par la formule :

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Nous obtenons ainsi :

$$(4) \qquad ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Si l'on pose :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{}$$

cette formule devient :

$$(4)' \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Il n'est pas inutile de réunir dans un tableau les diverses formes canoniques que nous avons obtenues.

TABLEAU DES FORMES CANONIQUES DU TRINOME $ax^2 + bx + c$.	
1° Forme générale.	(1) $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$
2° $b^2 - 4ac < 0$	(2) $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right].$ en posant $m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$
3° $b^2 - 4ac = 0$	(3) $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$ (3)' $a(x - x')^2.$ en posant $x' = -\frac{b}{2a}.$
4° $b^2 - 4ac > 0$	(4) $a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$ (4)' $a(x - x')(x - x'')$ en posant. $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

On déduirait immédiatement des résultats de ce tableau, la résolution et la discussion de l'équation du second degré; mais il est inutile d'y revenir.

106. **Signe du trinome.** — Il est souvent utile de connaître, sans être obligé de faire aucun calcul, le signe que prend le trinome du second degré pour une valeur quelconque de x. On y parvient aisément par la considération des formes canoniques. Dans le cas où le trinome n'a pas de zéros, il se met sous la forme (2); quel que soit x, la quantité entre crochets est positive; le trinome est donc du signe de a, c'est-à-dire du signe de son premier terme. Dans le cas du zéro double, on voit immédiatement sur la forme (3)′ que le trinome est du signe de a, à moins qu'il ne soit nul, ce qui a lieu pour $x = x'$.

Supposons enfin qu'il y ait deux zéros distincts x' et x''; nous avons la forme canonique :

$$(4)' \qquad a(x - x')(x - x'').$$

Supposons, pour fixer les idées :

$$x' < x''.$$

On peut alors faire trois hypothèses relativement à x : x est inférieur à x', ou bien compris entre x' et x'', ou bien supérieur à x''.

1° Si l'on a :

$$x < x',$$

on a, *a fortiori :*

$$x < x'',$$

les facteurs $x - x'$, $x - x''$ sont négatifs tous deux,

leur produit est donc positif et le produit $(4)'$ est du signe de a.

2° Si l'on a :

$$x' < x < x'',$$

le facteur $x - x'$ est positif et le facteur $x - x''$ est négatif, le produit $(4)'$ est alors de signe contraire à celui de a.

3° Enfin si x est supérieur à x'', les facteurs $x - x''$ et $x - x'$ sont tous deux positifs et le produit $(4)'$ est encore du signe de a.

Il résulte de cette étude des divers cas possibles le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME — *Le trinome du second degré est du même signe que son premier terme, sauf dans un cas unique, à savoir lorsque, le trinome ayant deux zéros distincts x' et x'', la valeur donnée à x est comprise entre x' et x''.*

107. **Inégalité du second degré.** — Le théorème précédent permet de résoudre aisément l'inégalité du second degré, c'est-à-dire toute inégalité de la forme :

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Étant donnée une telle inégalité, nous appellerons *équation correspondante* l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant le signe $>$ par le signe $=$.

Nous distinguerons trois cas :

1° L'équation correspondante n'a pas de racines. Dans ce cas, si a est positif, l'inégalité proposée

est *toujours* vérifiée; si a est négatif, elle n'est *jamais* vérifiée;

2° L'équation correspondante a une racine double. La conclusion est la même que dans le cas précédent sauf que, pour la valeur de x égale à la racine, l'inégalité se transforme en égalité;

3° L'équation correspondante a deux racines distinctes, que nous désignerons par x' et x'', en supposant $x' < x''$.

Dans ce cas, si a est positif, il faut que l'on ait :

$$\textit{ou bien} : x < x'$$
$$\textit{ou bien} : x > x''$$

et si a est négatif, il faut que l'on ait :

$$x' < x < x''.$$

On traiterait de même le cas de l'inégalité :

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

mais on peut la ramener à la précédente, car elle peut s'écrire :

$$-ax^2 - bx - c > 0.$$

Remarque I. — Pour distinguer la plus grande des deux racines x' et x'' il faut avoir soin de tenir compte du signe de a. Si l'on désigne par $\sqrt{b^2 - 4ac}$ le nombre *positif* dont le carré est égal à $b^2 - 4ac$, on a :

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dans le cas où a est *positif*. Au contraire, si a est

négatif, on a :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

car, alors, en multipliant par a les deux membres de l'inégalité, on doit changer les signes.

Remarque II — Dans le dernier cas traité, il est essentiel de remarquer que l'inégalité du second degré est remplacée, tantôt par une double inégalité avec alternative :

$$\text{ou bien } x < x'$$
$$\text{ou bien } x > x'',$$

tantôt par deux inégalités *simultanées* :

$$x' < x < x''.$$

On ne doit pas confondre ces deux cas. Par exemple si $x' = 1$ et $x'' = 2$, dans le premier cas il faut que x soit, ou bien inférieur à 1, ou bien supérieur à 2 (il serait absurde de dire que x doit être à la fois inférieur à 1 et supérieur à 2), tandis que dans le second cas il faut que x soit compris entre 1 et 2, c'est-à-dire à la fois supérieur à 1 et inférieur à 2.

On peut résumer dans le tableau suivant la solution de l'inégalité du second degré :

RÉSOLUTION DE L'INÉGALITÉ

$ax^2 + bx + c > 0.$

	$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac < 0$	Inégalité toujours vérifiée.	Inégalité jamais vérifiée.
$b^2 - 4ac = 0$	*Id.*, sauf qu'elle se transforme en égalité pour $x = \frac{-b}{2a}$.	*Id.*, sauf qu'elle se transforme en égalité pour $x = \frac{b}{2a}$.
$b^2 - 4ac > 0$	Inégalité vérifiée si l'on a *ou bien :* $x < x'$ *ou bien :* $x > x''$ on pose : $x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. et l'on a : $x' < x''$.	Inégalité vérifiée si l'on a *à la fois* $x' < x < x''$ on pose : $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. et l'on a : $x' < x''$.

108. **Comparaison d'un nombre donné aux racines d'une équation du second degré.** — On a souvent à résoudre un problème qui peut être regardé comme inverse de celui que nous venons d'étudier; c'est le suivant : *étant donnée une équation du second degré :*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

on connaît le signe de $f(m)$, m étant un nombre donné; que peut-on en conclure relativement à l'existence des racines et à la grandeur relative de m et de ces racines dans le cas où elles existent? Le nombre $f(m)$, défini par la relation :

$$f(m) = am^2 + bm + c$$

est ce qu'on appelle *le résultat de la substitution du nombre m dans le premier membre de l'équation proposée.* Nous distinguerons deux cas suivant que ce résultat est de signe contraire au coefficient a du premier terme, ou est de même signe.

1° Supposons d'abord que a et $f(m)$ soient de signes contraires; nous pouvons exprimer ce fait en écrivant que leur produit est négatif; le cas que nous étudions est donc caractérisé par l'égalité :

$$af(m) < 0.$$

Il suffit de se reporter au tableau de la page précédente (ou au théorème de la page 225) pour constater que ce cas ne peut se présenter que lorsque *l'équation proposée a des racines et que m est compris entre ces racines;* car dans tous les autres cas le trinome premier membre prend le signe de son premier terme. On a donc le très important théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque le résultat de la substitution d'un certain nombre m dans le premier membre d'une équation du second degré est de signe contraire au coefficient du premier terme, on peut affirmer deux faits : 1° l'équation a des racines distinctes; 2° le nombre m est compris entre ces racines.*

2° Supposons maintenant que l'on ait :

$$af(m) > 0.$$

Plusieurs hypothèses sont alors possibles : l'équation proposée peut ne pas avoir de racines, ou avoir une racine double différente de m, ou avoir deux racines x' et x'', m étant inférieur à la plus petite x' ou supérieur à la plus grande x''. Lorsque l'on se trouve dans ce dernier cas, voici comment on distingue entre ces deux alternatives ; on remarque que l'on a :

$$\frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a},$$

et que tout nombre inférieur à x' est aussi inférieur à $\frac{x' + x''}{2}$, c'est-à-dire à $-\frac{b}{2a}$ tandis que tout nombre supérieur à x'' est supérieur à $-\frac{b}{2a}$. Donc, lorsque le résultat de la substitution de m a le signe de a, et que l'équation a des racines, il y a lieu, pour élucider la position de m par rapport à ces racines, de comparer m à la *demi-somme* de ces racines $-\frac{b}{2a}$. Si m est inférieur à la demi-somme, on peut affirmer que m est inférieur à la plus petite racine, et si m est supérieur à la demi-somme, on peut affirmer que m est supérieur à la plus grande racine.

Nous pouvons résumer la discussion précédente dans le tableau suivant, où nous laissons de côté le cas où $f(m) = 0$, car m est alors racine et l'étude de l'équation est aisée.

COMPARAISON D'UN NOMBRE m AUX RACINES DE L'ÉQUATION

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

HYPOTHÈSES			CONCLUSIONS
$af(m) < 0$			L'équation a des racines et m est compris entre ces racines : $x' < m < x''$.
$af(m) > 0$	$b^2 - 4ac < 0$		L'équation n'a pas de racines.
	$b^2 - 4ac = 0$		L'équation a une racine double x' et l'on a : $m \neq x'$.
	$b^2 - 4ac > 0$	$m < -\frac{b}{2a}$	L'équation a deux racines x' et x'' ; l'on a : $m < x' < x''$.
		$m > -\frac{b}{2a}$	L'équation a deux racines x' et x'' et l'on a : $x' < x'' < m$.

109. **Application à la discussion des équations du second degré.** — Les résultats qui précèdent permettent de *discuter* les équations du second degré, au moins dans des cas très étendus. Nous allons montrer sur des exemples quelle marche on doit suivre dans une telle discussion; c'est par l'étude de ces exemples et par la résolution des

exercices qui sont indiqués à la fin du chapitre, que l'élève arrivera à savoir conduire par lui-même une discussion du second degré, bien mieux qu'il ne pourrait le faire en apprenant de nombreuses règles verbales; nous avons réduit au strict nécessaire les résultats qu'il importe de retenir. Ces résultats résumés dans les tableaux ne doivent d'ailleurs pas être appris par cœur, mais bien compris et fréquemment appliqués; l'élève arrivera ainsi à les posséder sans crainte d'erreur de mémoire.

Observons, à ce sujet, que le tableau de la page 231 comprend, comme cas particulier, la discussion faite page 218 sur le signe des racines de l'équation du second degré; il suffit en effet d'y supposer $m = 0$ pour obtenir les résultats sur les signes des racines; $f(m)$ se réduit alors à c et le produit $af(m)$ a le signe de ac, qui est le même que le signe de $\frac{c}{a}$. Le tableau de la page 231 suffit donc *complètement*, dans le cas où a n'est pas nul, à la discussion de l'équation du second degré; il importe de le bien posséder, mais il est inutile de se charger la mémoire d'autres résultats; dans le cas où a est nul, on recourra au tableau de la page 218 Il pourra être utile de se servir aussi du tableau de la page 228, mais il faut observer qu'il ne renferme rien qui ne soit dans celui de la page 231.

Exemple I. — *Discuter l'existence et les signes des racines de l'équation :*

$$(\lambda + 3)x^2 + 2(2\lambda + 1)x + \lambda + 5 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est (en utilisant

la formule réduite) :

$$D = (2\lambda + 1)^2 - (\lambda + 3)(\lambda + 5)$$
$$= 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - \lambda^2 - 8\lambda - 15$$
$$= 3\lambda^2 - 4\lambda - 14.$$

Ce discriminant s'annule pour les valeurs :

$$\lambda' = \frac{2 - \sqrt{46}}{3} \qquad \lambda'' = \frac{2 + \sqrt{46}}{3}.$$

Le produit des racines de l'équation proposée est :

$$P = \frac{\lambda + 5}{\lambda + 3};$$

son signe est le même que celui du produit :

$$(\lambda + 3)(\lambda + 5),$$

trinome dont les zéros sont -3 et -5; quant à la somme elle est :

$$S = -\frac{2(2\lambda + 1)}{\lambda + 3},$$

et son signe est le même que celui du trinome :

$$-(2\lambda + 1)(\lambda + 3),$$

dont les zéros sont $-\frac{1}{2}$ et -3.

Les valeurs *remarquables* de λ, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles D, P ou S changent de signe, sont λ', λ'', -3, -5, $-\frac{1}{2}$. Il est commode de ranger ces valeurs remarquables par ordre de grandeur; pour cela il faut comparer -3, -5 et

$-\frac{1}{2}$ à λ' et λ''. Pour faire cette comparaison, on pourrait calculer λ' et λ'' à un dixième près; il est, en général, plus simple d'utiliser les résultats du paragraphe 108.

Posons :

$$D = F(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda - 14.$$

On a :

$$F(-5) = 3 \times 25 + 4 \times 5 - 14 > 0$$
$$F(-3) = 3 \times 9 + 4 \times 3 - 14 > 0$$
$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} - 14 < 0.$$

On remarque qu'il est inutile ici de calculer complètement F(— 5), etc , pour en connaître les signes. Comme le coefficient de λ^2 dans D est positif, $-\frac{1}{2}$ est compris entre λ' et λ''; dès lors -5 et -3 sont certainement inférieurs à λ' (ils ne peuvent pas être supérieurs à λ'', puisque λ'' est supérieur à $-\frac{1}{2}$; on aurait pu observer aussi que λ'' est positif; en tout cas il est ici inutile de comparer -5 et -3 à la demi-somme, et il y a lieu de s'épargner tout travail inutile). Les valeurs remarquables de λ étant rangées par ordre de grandeur, nous pouvons former le tableau suivant[1] :

1. Dans ce tableau, on aurait pu se dispenser d'indiquer les signes de P et S dans les intervalles où D est négatif; mais il y a avantage à écrire chaque colonne verticale sans s'interrompre; on va ainsi bien plus vite et on se trompe moins.

λ	D	P	S	CONCLUSIONS
$-\infty$	$+$	$+$	$-$	$x' < 0 \quad x'' < 0$
-5	$+$	0	$-$	$x' < 0 \quad x'' = 0.$
	$+$	$-$	$-$	$x' < 0 \quad < x''.$
-3	$+$	∞	∞	$x' = \infty\,; \quad x'' = \frac{1}{5}.$
	$+$	$+$	$+$	$x' > 0 \quad x'' > 0.$
λ'	0	$+$	$+$	$x' = x'' = -\frac{2(2\lambda' + 1)}{\lambda' + 3} > 0.$
	$-$	$+$	$+$	Pas de racines.
$-\frac{1}{2}$	$-$	$+$	0	Pas de racines.
	$-$	$+$	$-$	Pas de racines.
λ''	0	$+$	$-$	$x' = x'' = -\frac{2(2\lambda'' + 1)}{\lambda'' + 3} < 0.$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$x' < 0 \quad x'' < 0.$

Dans une première colonne, nous avons rangé par ordre de grandeur les valeurs remarquables de λ; dans les trois colonnes suivantes, nous avons indiqué les signes (ou les valeurs particulières o et ∞) de D, P, S pour ces valeurs remarquables et dans les intervalles qui les séparent; enfin, dans la dernière colonne nous avons indiqué les conclusions auxquelles conduisent les résultats des trois colonnes D, P, S.

Exemple II. — *Combien l'équation*

$$5 \cos^2 x - 19 \cos x + 13 = 0$$

fournit-elle de valeurs acceptables pour $\cos x$?

Pour qu'une valeur trouvée pour $\cos x$ soit acceptable, il est nécessaire qu'elle soit comprise entre -1 et 1. Si nous posons :

$$\cos x = y$$
$$f(y) = 5y^2 - 19y + 13 = 0,$$

il s'agit de savoir combien le trinome $f(y)$ a de zéros compris entre -1 et 1. Or on a :

$$f(-1) = 5 + 19 + 13 > 0$$
$$f(1) \quad = 5 - 19 + 13 < 0,$$

$f(1)$ étant négatif, alors que le coefficient de y^2 dans $f(y)$ est positif, on peut affirmer que $f(y)$ admet deux racines distinctes y' et y'' et que l'on a :

$$y' < 1 < y'';$$

d'autre part $f(-1)$ étant positif, on en conclut que -1 est inférieur à y', car -1 ne peut pas être supérieur à y'', puisque y'' est plus grand que 1. On

a donc :

$$-1 < y' < 1 < y''$$

et la solution :

$$\cos x = y'$$

est la seule solution acceptable pour $\cos x$. L'équation proposée fournit donc une solution acceptable pour $\cos x$. On a d'ailleurs :

$$y' = \frac{19 - \sqrt{361 - 260}}{10} = \frac{19 - \sqrt{101}}{10}.$$

Exemple III. — *Discuter l'équation :*

$$(\lambda + 4)\sin^2 x - 2(\lambda + 3)\sin x + \lambda + 1 = 0.$$

Posons :

$$f(y) = (\lambda + 4)y^2 - 2(\lambda + 3)y + \lambda + 1.$$

Nous aurons :

$$D = (\lambda + 3)^2 - (\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda + 5$$
$$(\lambda + 4) f(-1) = (\lambda + 4)(4\lambda + 11)$$
$$(\lambda + 4) f(1) = -(\lambda + 4).$$

Les valeurs remarquables de λ, rangées par ordre de grandeur, sont donc :

$$-5, \qquad -4, \qquad \frac{-11}{4},$$

et l'on peut former le tableau suivant :

λ	D	$af(-1)$	$af(1)$	CONCLUSIONS
$-\infty$				
	$-$	$+$	$+$	Pas de racines.
-5	0			Racines égales $y'=y''=2$.
	$+$	$+$	$+$	$1 < y' < y''$.
-4		0	0	$y'=\infty \qquad y''=\frac{3}{2}$.
	$+$	$-$	$-$	$y' < -1 < 1 < y''$.
$-\frac{11}{4}$		0	$-$	$y'=-1 \qquad y''>1$.
	$+$	$+$	$-$	$-1 < y' < 1 < y''$.
$+\infty$				

Dans l'intervalle -5, -4, on aurait pu se demander si les racines y' et y'', au lieu d'être toutes deux supérieures à 1, n'étaient pas toutes deux comprises entre -1 et 1 ou toutes deux inférieures à -1. Pour lever ce doute, la méthode régulière consiste à comparer -1 et $+1$ à la demi-somme $\frac{\lambda+3}{\lambda+4}$; on a :

$$\frac{\lambda+3}{\lambda+4} > 1,$$

car $\lambda+4$ étant ici négatif, ceci revient à :

$$\lambda+3 < \lambda+4,$$

ce qui est évident. Un procédé exigeant moins de calcul consisterait à s'appuyer sur des considérations de *continuité*, que nous ne pouvons développer ici.

En résumé, on voit que le sinus devant être compris entre -1 et $+1$, l'équation proposée ne

fournit *aucune* valeur acceptable pour $\sin x$ lorsque λ est inférieur à $\frac{-11}{4}$ et en fournit *une seule* lorsque λ est supérieur à $\frac{-11}{4}$.

IV. VARIATIONS DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ; REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

110. — De même que nous avons fait suivre l'étude de l'équation du premier degré à une inconnue, de l'étude des variations de la fonction linéaire $ax+b$, il est naturel d'étudier les variations du trinome ax^2+bx+c; nous allons faire cette étude, en commençant par le cas particulier où les coefficients b et c sont nuls

Nous allons donc étudier la fonction ax^2, en commençant même par supposer que le coefficient a est égal à 1.

111. **Variations de $y=x^2$; représentation graphique** — Nous nous proposons d'étudier les variations de la fonction y définie par l'équation :

$$(1) \qquad y=x^2.$$

Supposons d'abord x négatif et très grand; en valeur absolue y est alors très grand et positif; par exemple, si $x=-1\,000$, $y=1\,000\,000$. Lorsque x croît en restant négatif, c'est-à-dire prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est plus petite, y décroît, par exemple pour $x=-10$, $y=100$; pour $x=-2$, $y=4$, pour $x=-1$, $y=1$; pour $x=-\frac{1}{10}$, $y=\frac{1}{100}$.

On voit que y se rapproche de zéro en même temps que x; pour $x = 0$, on a $y = 0$; ensuite, x continuant à croître pour prendre des valeurs positives de plus en plus grandes, y prend aussi des valeurs positives de plus en plus grandes. En résumé, on peut former le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	positif, décroît	0	positif, croît	$+\infty$

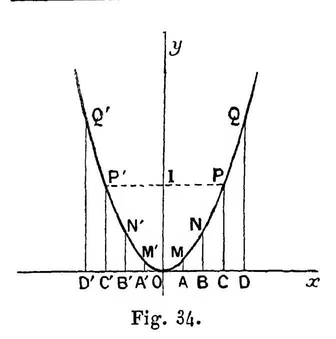


Fig. 34.

La fonction y est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ *et croissante dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Pour effectuer la représentation graphique des variations de y, traçons deux axes rectangulaires Ox, Oy (fig. 34) et choisissons une unité de longueur OB Nous avons construit les points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ dont les abscisses sont :

$$\frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{3}{2}, \ 2, \ -\frac{1}{2}, \ -1, \ -\frac{3}{2}, \ -2.$$

Les ordonnées correspondantes doivent être :

$$AM = \frac{1}{4}, \quad BN = 1, \quad CP = \frac{9}{4}, \quad DQ = 4$$

$$A'M' = \frac{1}{4}, \quad B'N' = 1, \quad C'P' = \frac{9}{4}, \quad D'Q' = 4.$$

En réunissant par un trait continu les points Q′, P′,

N′, M′, O′, M, N, P, Q, on obtient une courbe telle que nous l'avons figurée; cette courbe devrait être prolongée au delà des points Q et Q′, mais les dimensions forcément limitées de la figure ne nous permettent d'en représenter qu'une portion.

On remarque immédiatement que les ordonnées CP, C′P′ qui correspondent à deux abscisses opposées, OC, OC′ sont *égales;* la droite PP′ est donc parallèle à Ox; cette droite PP′ est donc perpendiculaire à Oy et de plus le point I où elle rencontre Oy est le milieu de PP′, puisque O est le milieu de CC′. On peut donc, connaissant P, obtenir P′ en abaissant de P la perpendiculaire PI sur Oy et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur IP′ = PI. On exprime ce fait en disant que P′ est le symétrique de P par rapport à Oy.

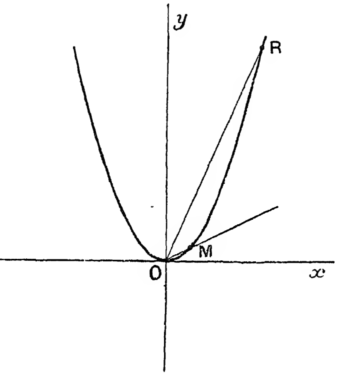


Fig. 35.

Comme ce raisonnement s'applique à tout point P de la branche OMNPQ, on dira que la branche OM′N′P′Q′ est *symétrique* de OMNPQ par rapport à Oy. La courbe est donc formée de deux branches symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy : *on dit alors que cette courbe admet* Oy *comme axe de symétrie.*

Nous allons étudier d'un peu plus près l'allure de la courbe; soit M un point de la courbe (fig. 35);

joignons-le au point O. Quelle sera la pente de OM? Si l'abscisse de M est x, son ordonnée est x^2; la pente de OM, égale au quotient de l'ordonnée de M par son abscisse donc est égale à x. On voit que cette pente est très voisine de zéro lorsque x est très petit; donc lorsque M se rapproche de O, OM tend à se confondre avec Ox; de même lorsque x devient très grand, la pente devient très grande et la droite, telle que OR, se rapproche de plus en plus de Oy. Ces remarques permettent de se rendre compte que l'allure générale de la courbe est bien celle que l'on a indiquée.

112. **Variations de $y = -x^2$ et de $y = ax^2$.** — Considérons maintenant la fonction :

$$y = -x^2.$$

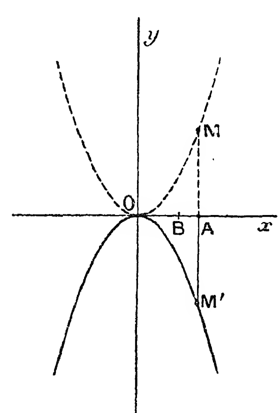


Fig. 36.

Traçons deux axes Ox, Oy, choisissons une unité de longueur OB, et traçons la courbe $y = x^2$ que nous figurerons en pointillé (fig. 36).

Soit A un point quelconque de Ox; à ce point A correspond le point M dont l'ordonnée $AM = \overline{OA}^2$. Quel est le point de la courbe $y = x^2$ qui correspond à la même abscisse? C'est un point M′ dont l'ordonnée AM′ est négative et a pour valeur absolue $\overline{OA}^2$; *donc* M′ *est symétrique de* M *par rapport à* Ox; à une même valeur quelconque de x corres-

pondent dans les courbes $y = x^2$ et $y = -x^2$ *des ordonnées opposées*. On obtiendra donc la seconde courbe en construisant la symétrique de la première par rapport à Ox.

On peut faire le tableau suivant des variations de la fonction $y = -x^2$:

x	$-\infty$		o		$+\infty$
y	$-\infty$	négatif, croît	o	négatif, décroît	$-\infty$

Considérons maintenant la fonction définie par l'équation :

$$y = ax^2,$$

dans laquelle a désigne une constante positive.

Il est facile de voir que la courbe qui représente les variations de y est tout à fait semblable de forme à celle que nous avons étudiée $y = x^2$. On peut même aller plus loin et montrer que ces deux équations seront représentées par *la même* courbe, si l'on choisit convenablement *les unités* de longueur. Proposons-nous, en effet, de construire la courbe représentée par l'équation :

$$y = 10\,x^2,$$

l'unité de longueur étant le centimètre; on remarquera que l'on peut écrire cette équation :

$$10y = (10x)^2.$$

Si nous faisons $x = \frac{2}{10}$ nous obtenons $10x = 2$; d'où :

$$10y = 2^2 = 4 \qquad y = \frac{4}{10}.$$

Donc au point d'abscisse $\frac{2}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire 2^{mm}, correspond une ordonnée égale à $\frac{4}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire à 4^{mm}. On verrait de même qu'aux abscisses $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ correspondent des ordonnées égales à $\frac{9}{10}$, $\frac{16}{10}$, $\frac{25}{10}$. En sorte que, si l'on construisait la courbe correspondant à l'équation :

$$y = x^2$$

en prenant le millimètre comme unité de longueur, on obtiendrait la même courbe que si l'on partait de l'équation :

$$y = 10x^2,$$

et que l'on prenne le centimètre pour unité de longueur.

Les courbes que nous avons obtenues et qui ne diffèrent que par l'*échelle* à laquelle elles sont tracées, ont reçu le nom de *paraboles*

113. **Variations de trinomes à coefficients numériques.** — I. Soit le trinome :

$$(1) \qquad y = -2x^2 + 3.$$

Si nous construisons la parabole représentée par l'équation :

$$(2) \qquad y = -2x^2,$$

nous voyons que la courbe (1) diffère de la courbe (2) en ce que, pour chaque valeur de x, l'ordonnée y est augmentée de 3. Sur la figure 37, où l'unité

de longueur est OA, nous avons tracé en pointillé la courbe (2); c'est la courbe SRQOMNP; la courbe (1) s'en déduit en augmentant de la même longueur 3 les ordonnées de tous ses points; on obtient ainsi la courbe S'R'P'O'M'N'Q', les segments SS', RR', PP', OO', MM', NN', QQ' étant tous égaux à 3, parallèles et de même sens; la courbe tracée en trait plein qui est la courbe demandée se déduit de la courbe auxiliaire en pointillé par une *translation* parallèle à Oy.

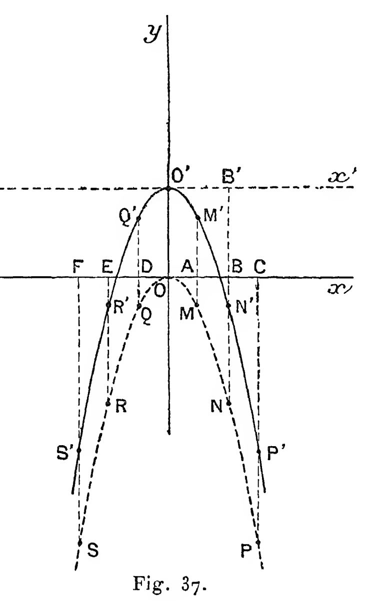


Fig. 37.

On peut suivre une marche un peu différente; prenons OO'=3, et traçons O'x' parallèle à Ox. Si nous prenons les axes x'O'y au lieu des axes xOy, on voit que les abscisses des divers points ne changent pas, mais que les ordonnées sont diminuées de 3 (il faut remarquer que l'on a changé l'axe des *abscisses;* il en résulte un changement d'origine pour les *ordonnées*, car l'origine des ordonnées est le point d'intersection de l'axe des abscisses avec celui des ordonnées). Pour avoir la courbe cherchée, il suffit donc de construire la

courbe :

$$y = -2x^2,$$

par rapport aux axes $x'O'y$.

Par exemple, si l'on a :

$$O'B' = 2$$
$$B'N' = -4,$$

il en résulte :

$$OB = 2$$
$$BN' = BB' + B'N' = 3 - 4 = -1.$$

II. — Considérons maintenant l'équation :

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Nous obtiendrons une courbe qui se déduira de la courbe représentée par l'équation :

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

par une translation parallèle à Ox; pour des abscisses différant de 1, on obtient dans ces deux courbes la même ordonnée; on peut aussi changer l'axe des ordonnées en prenant pour origine le point O' de Ox dont l'abscisse est égale à 1 et pour axe des ordonnées la perpendiculaire $O'y'$ à Ox.

Sur la figure 38, on a marqué en pointillé la courbe TSROMPQ :

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

l'unité de longueur étant $oo' = O'A = AB$; la courbe cherchée est la courbe T'S'R'O'M'P'Q' qui s'en

déduit par translation :

$$TT' = SS' = RR' = OO' = MM' = PP' = QQ' = 1.$$

En effet, pour $x = 2$, par exemple, on a

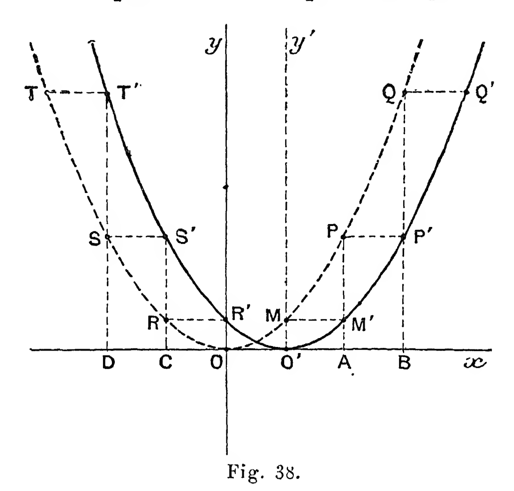


Fig. 38.

$x - 1 = 1$; on obtient ainsi le point M' de la courbe cherchée, dont l'ordonnée $AM' = \frac{1}{2}$ est égale à l'ordonnée OM qui correspond à l'abscisse $OO' = 1$ de la courbe en pointillé $y = \frac{1}{2} x^2$.

III. — Considérons enfin le trinome :

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Nous pouvons écrire ce trinome sous la forme canonique :

$$y = (x + 2)^2 - 1,$$

et sous cette forme, on voit que la courbe se déduit de la courbe :

$$y = x^2,$$

par une double translation, parallèlement à Ox et à Oy.

Soit en effet (fig. 39) O′ le point d'abscisse — 2 et d'ordonnée — 1 et M un point de la courbe cher-

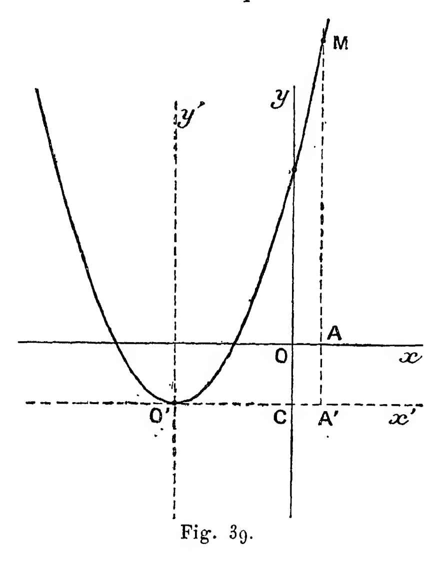


Fig. 39.

chée, d'abscisse $x = \text{OA}$ et d'ordonnée $y = \text{AM}$. On a, sur la figure :

$$\text{O}'\text{A}' = \text{O}'\text{C} + \text{CA}' = \text{O}'\text{C} + \text{OA} = x + 2$$
$$\text{A}'\text{M} = \text{A}'\text{A} + \text{AM} = \text{CO} + \text{AM} = y + 1.$$

La relation :

$$y = (x + 2)^2 - 1,$$

donne donc :

$$A'M = \overline{O'A'}^2,$$

c'est-à-dire que la courbe lieu du point M est bien définie par l'équation :

$$y = x^2,$$

par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$.

Les relations que nous avons écrites sont d'ailleurs des relations entre segments et sont vraies en général, comme nous l'avons vu à propos des changements d'origine.

En résumé, l'étude des trinomes à coefficients numériques conduit *aux mêmes courbes* que l'étude de l'équation $y = ax^2$; la position de ces courbes par rapport aux axes est seule changée et, dans chaque cas particulier, l'étude attentive de la figure fait connaître la position des droites $O'x'$ et $O'y'$. Le point O' est *le sommet de la parabole;* la droite $O'y'$ qui, nous le savons, est un axe de symétrie, est dite l'*axe de la parabole*, la droite $O'x'$ s'appelle la *tangente au sommet* (cette dernière dénomination sera pleinement justifiée plus loin, p. 256).

114. **Variations d'un trinome quelconque.** — Pour étudier les variations du trinome

$$(1) \qquad y = ax^2 + bx + c$$

et leur représentation graphique, le plus simple est d'utiliser la forme canonique générale :

$$(2) \qquad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

On voit dès lors immédiatement, par des raison-

nements analogues aux précédents, que si l'on désigne par O′ le point dont les coordonnées sont :

$$-\frac{b}{2a}, \qquad -\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

par $O'x'$, $O'y'$ les parallèles à Ox, Oy menées par O′, par x' et y'' les cordonnées d'un point par rapport à ces axes, la courbe représentative du trinome ne différera pas de la parabole :

$$y' = ax'^2,$$

admettant $O'y'$ comme axe et $O'x'$ comme tangente au sommet. Mais nous n'insisterons pas sur cette méthode, préférant développer ici l'étude directe des variations du trinome (1) en utilisant la forme canonique (2).

Pour étudier les variations de y d'après la formule (2) nous remarquerons que x ne figure dans le second membre que par l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, expression toujours positive, sauf pour $x=-\frac{b}{2a}$, valeur qui l'annule. Si a est positif, le produit $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est donc toujours positif ou nul; il est négatif ou nul lorsque a est négatif. Il en résulte que, lorsque a est positif, y prend *la plus petite valeur possible* ou, comme on dit, atteint un *minimum absolu*, lorsque x est égal à $-\frac{b}{2a}$; au contraire si a est négatif, y atteint un *maximum absolu* pour $x=-\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire prend, pour cette valeur

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$x+\frac{b}{2a}$	$-\infty$;	négatif, croît ;	o	; positif croît ;	$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	positif, décroît ;	o *minimum absolu*	; positif croît ;	$+\infty$
$a>0$ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	positif, décroît ;	o *minimum absolu*	; positif croît ;	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$;	décroît ;	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *minimum absolu*	; croît ;	$+\infty$
$a<0$ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$;	négatif, croît ;	o *maximum absolu*	; négatif décroît ;	$-\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$	$-\infty$;	croît ;	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *maximum absolu*	; décroît ;	$+\infty$

de x, une valeur plus grande que pour toute autre valeur de x.

L'expression $x + \frac{b}{2a}$ croît avec x; lorsqu'elle est positive, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens, c'est-à-dire croît avec x; lorsque $x + \frac{b}{2a}$ est négatif, sa valeur absolue décroît lorsque sa valeur relative croît; donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ décroît lorsque x croît, si $x + \frac{b}{2x}$ est négatif.

Enfin, suivant que a est positif ou négatif, le produit $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, ou en sens contraire.

L'étude de la variation du trinome a été résumée dans le tableau de la page 251.

Quant au signe du trinome, il a été discuté au n° 106; on pourrait retrouver ici les résultats de cette discussion, suivant le signe du *minimum* ou du *maximum*; par exemple si a est positif, et si $4ac - b^2$ est aussi positif, le minimum absolu est positif, y ne peut donc pas devenir égal à zéro; si au contraire $4ac - b^2$ est négatif, y décroît de $+\infty$ jusqu'à ce minimum négatif et par suite s'annule dans l'intervalle; de même y s'annule en croissant de ce minimum négatif jusqu'à $+\infty$.

Les principaux cas qui peuvent se présenter peuvent être représentés sur les figures ci-contre 40 à 45 sur lesquelles l'abscisse OA est égale à $-\frac{b}{2a}$ valeur

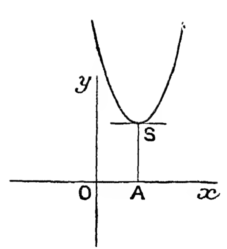


Fig. 40.

$a > 0$; $4ac - b^2 > 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; minimum positif, pas de racines.

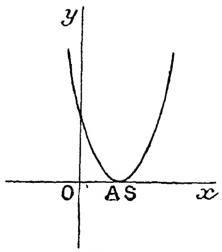


Fig. 41.

$a > 0$ $4ac - b^2 = 0$

minimum nul, racine double.

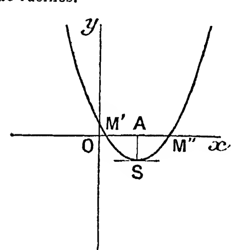


Fig. 42.

$a > 0$ $4ac - b^2 < 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$; minimum négatif, 2 racines OM′ et OM″.

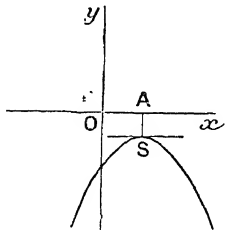


Fig. 43.

$a < 0$ $4ac - b^2 > 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$; maximum négatif, pas de racines.

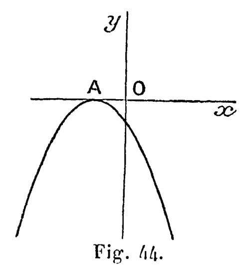


Fig. 44.

$a < 0$; $4ac - b^2 = 0$

maximum nul, racine double.

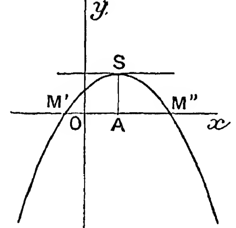


Fig. 45.

$a < 0$; $4ac - b^2 < 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; maximum positif, 2 racines OM′ et OM″.

de x qui fournit le minimum et l'ordonnée AS à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, valeur de y pour $x = -\frac{b}{2a}$; S est le sommet de la parabole.

Remarque I. — La valeur de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ne dépend que de la valeur absolue de $x + \frac{b}{2a}$; si l'on pose successivement :

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

$$x + \frac{b}{2a} = -t,$$

cette expression reprend la même valeur, et par suite y reprend aussi la même valeur; on a donc la même ordonnée pour les valeurs suivantes de l'abscisse :

$$x = -\frac{b}{2a} + t$$

$$x = -\frac{b}{2a} - t,$$

c'est-à-dire pour des valeurs situées de part et d'autre du point A $\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$, de telle manière que ce point A soit leur milieu. On retrouve ainsi la symétrie déjà démontrée par rapport à la parallèle à Oy passant par le sommet.

Remarque II. — Les zéros du trinome sont précisément les abscisses des points d'intersection de la parabole avec Ox. Lorsque la parabole est tangente à Ox, il y a un zéro *double* : les deux points d'intersection se sont confondus.

115. **Cas de la courbe $x = y^2$. Identité avec la**

définition géométrique de la parabole. — Il e
clair que l'on pourrait, au lieu d'écrire :

$$y = ax^2 + bx + c,$$

écrire :

$$x = ay^2 + by + c,$$

c'est-à-dire échanger les lettres x et y; c'est une simple différence de notation. Nous nous bornerons au cas de la courbe :

$$x = y^2, \tag{1}$$

qui est analogue à la courbe :

$$y = x^2,$$

sauf que maintenant c'est Ox qui est l'axe de symétrie et Oy la tangente au sommet. Soit (fig. 46)

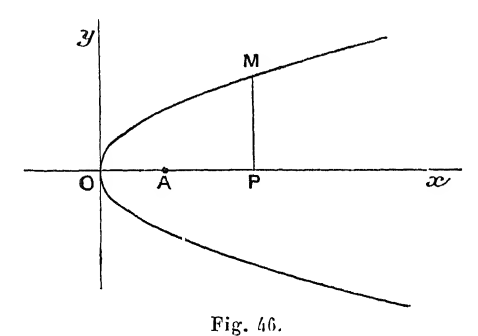


Fig. 46.

OA l'unité de longueur, M un point de la courbe (1), PM son ordonnée et OP son abscisse. L'unité de longueur étant OA, on a :

$$x = \frac{OP}{OA} \qquad y = \frac{PM}{OA},$$

et par suite la relation (1) donne :

$$\frac{PO}{OA} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{OA}^2},$$

c'est-à-dire :

$$OA. OP = \overline{PM}^2.$$

Or, on sait que cette relation est une consé quence de la définition géométrique de la parabol (lieu des points dont la distance à un point fixe di *foyer* est égale à leur distance à une droite fix dite *directrice*) si l'on désigne par OA le double du paramètre, c'est-à-dire le double de la distance du foyer à la directrice. Il y a donc identité entre les courbes que nous avons appelées paraboles et les courbes auxquelles on donne ce nom en géométrie ; les dénominations d'*axe*, *sommet*, *tangente au sommet* sont ainsi pleinement justifiées.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

127. — Résoudre les équations :

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$
$$2x^2 - 5x - 9 = 0$$
$$3x^2 - x - \sqrt{2} = 0$$
$$x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$3x^2 - 8x + 7 = 0$$

128. — Résoudre les équations :

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 2$$

$$\frac{2x+3}{x+4} = \frac{2x+4}{5x-3}$$

$$\frac{3x-2}{x} = \frac{2x-4}{x+1} + 2.$$

129. — Former une équation du second degré admettant pour racines 5 et -7.

130. — Former une équation du second degré admettant pour racines 1000 et 0,001.

131. — Former une équation du second degré admettant pour racines $\sqrt{3}$ et $\sqrt{4}$.

132. — Quels sont les signes des racines de l'équation :

$$(a+3)x^2+(2a+3)x+a+5=0,$$

lorsque a prend toutes les valeurs possibles?

On commencera par rechercher pour quelles valeurs de a ces racines existent.

133. — Même question pour l'équation :

$$(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0.$$

134. — Même question pour l'équation :

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+3a+4=0.$$

135. — Discuter l'existence et les signes des racines de l'équation :

$$(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0,$$

lorsque a varie de $-\infty$ à $+\infty$.

136. — Résoudre et discuter l'équation :

$$x^2(2\cos a+3)+2x(\cos a-1)+3\cos a=0,$$

dans laquelle a désigne un angle donné.

137. — Discuter l'équation :

$$(a-5)\cos^2 x+(2a+3)\cos x+3a=0,$$

dans laquelle a est une constante donnée, positive ou négative, et x un angle inconnu.

138. — Résoudre l'inégalité :

$$3\cos^2 x-12\cos x+5>0,$$

en supposant l'angle x compris entre $0°$ et $360°$ (ou entre 0^g et 400^g dans la division centésimale du quadrant).

139. — Résoudre, dans la même hypothèse, l'inégalité :

$$5\sin^2 x+3\sin x-1<0.$$

140. — Résoudre et discuter l'inégalité :

$$(1+\lambda)x^2 - 3\lambda x - 1 > 0.$$

141. — Construire la parabole :

$$y = \frac{3}{5}x^2,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

142. — Construire la même courbe en prenant pour unité de longueur : 1° le décimètre; 2° le millimètre.

143. — Construire la parabole :

$$y = 40\,000\,x^2$$

en prenant pour unité de longueur : 1° le mètre; 2° le décamètre.

144. — Construire la parabole

$$y = -0{,}0003x^2$$

en prenant pour unité de longueur le dixième de millimètre.

145. — Construire la parabole :

$$y = x^2,$$

et la droite :

$$y = 3x + 4,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre. Mesurer les abscisses de leurs points communs et vérifier qu'elles sont égales aux racines de l'équation :

$$x^2 = 3x + 4.$$

146. — Même question pour la parabole :

$$y = \frac{1}{5}x^2.$$

et la droite

$$y = 2x + 10.$$

On prendra pour unité le millimètre.

en prenant pour unité le centimètre; mesurer les des points d'intersection de cette courbe avec Ox.

148. — Étudier les variations du trinome :

$$y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x - 1.$$

Courbe représentative, en prenant le centimètre p unité.

149. — Construire la courbe :

$$x = 2y^2 - 5y + 1,$$

en prenant pour unité le centimètre.

150. — Construire les courbes suivantes :

$$x = 50\,000y^2 + 300y - 3$$
$$y = 0{,}0001x^2 + 0{,}01x - 1,$$

en prenant pour chacune d'elles une unité de longueu commode, que l'élève devra choisir.

CHAPITRE VII

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

---

116. **Définition.** — On appelle problèmes du second degré les problèmes dont la résolution peut se ramener à la résolution d'équations du *second* degré à une inconnue et d'équations du *premier* degré à une ou plusieurs inconnues. Nous ne considérerons ici que les problèmes pour lesquels il suffira de résoudre *une seule* équation du second degré à une inconnue et, le plus souvent même, il n'y aura pas de système auxiliaire du premier degré.

A propos de cette définition, on pourrait répéter les remarques que nous avons faites sur la définition des problèmes du premier degré.

117. **Mise en équation. Discussion.** — Au sujet de la mise en équation, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit pour les problèmes du premier degré ; mais quelques remarques nouvelles doivent être faites pour la discussion.

Trois circonstances, en effet, se présentent pour le second degré qui ne se présentaient jamais pour

le premier : 1° *il peut ne pas y avoir de racines;* 2° il y a fréquemment *deux racines;* l'une peut convenir au problème et non pas l'autre; il peut arriver que ces deux racines donnent deux solutions différentes du problème et il peut arriver aussi que ces racines, quoique différentes, conduisent à la même solution du problème (voir, plus loin, Problèmes); 3° enfin, il peut y avoir *une racine double;* nous verrons (Problème IV) quelle grande importance peut avoir cette circonstance dans la discussion.

Dans la discussion des problèmes du premier degré, il pouvait arriver que la solution disparaisse en devenant infinie; c'est ce qui se produit lorsque, dans l'équation

$$ax + b = 0,$$

le coefficient a devient nul. De même, si dans l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le coefficient a devient nul sans que b le soit, l'équation *s'abaisse* au premier degré et n'admet plus que la racine $\frac{-c}{b}$; la racine qui a disparu est devenue infinie. De même si les deux coefficients a et b sont nuls, sans que c le soit, l'équation n'est vérifiée pour aucune valeur finie de x; elle a deux racines infinies (ou une racine double infinie, comme l'on veut). Enfin si a, b, c sont nuls tous les trois, l'équation est vérifiée, quel que soit x; elle est indéterminée.

118. **Exemples simples de problèmes du second**

degré. — PROBLÈME I. — *Un rectangle a des côtés égaux respectivement à 4ᵐ et à 7ᵐ. De combien doit-on augmenter l'un des côtés pour que, en diminuant en même temps l'autre côté de la même longueur, la surface devienne 24 mètres carrés?*

Si l'on désigne par x la longueur cherchée, exprimée en mètres, les côtés deviendront respectivement $4+x$ et $7-x$; si x est positif, on aura augmenté le côté égal primitivement à 4 et diminué l'autre; si x est négatif, ce sera le contraire, mais en tout cas les conditions de l'énoncé sont satisfaites. La surface d'un rectangle exprimée en mètres carrés est égale au produit des côtés exprimés en mètres; on doit donc avoir :

$$(4+x)(7-x)=24,$$

c'est-à-dire :

$$x^2-3x-4=0,$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

On a les deux racines :

$$x'=\frac{8}{2}=4$$

$$x''=\frac{-2}{2}=-1.$$

La première donne pour côtés $4+4$ et $7-4$, c'est-à-dire 8 et 3; la seconde donne $4-1$ et $7+1$, c'est-à-dire 3 et 8. On a donc deux solutions du problème proposé, mais ces solutions conduisent à deux rectangles égaux, dont les côtés sont simple-

ment permutés. Cela tient à ce que le problème proposé revient à ceci : puisque l'on diminue l'un des côtés et qu'on augmente l'autre de la même longueur, leur somme reste constante et égale à 11 ; il s'agit donc de trouver un rectangle connaissant la surface et la moitié du périmètre; nous allons résoudre ce problème et voir qu'il y a un seul rectangle répondant à la question.

Problème II. — *Quels sont les côtés d'un rectangle dont la surface est 30 mètres carrés et le mètre 22 mètres ?*

Désignons par x' et x'' ces côtés, exp mètres; le périmètre est $2x' + 2x''$ et $x'x''$; on a donc :

$$x' + x'' = 11$$
$$x'x'' = 30.$$

Il s'agit donc de trouver deux nombres x' et x'' connaissant leur somme et leur produit. Pour cela, nous remarquerons que nous connaissons les coefficients de l'équation du second degré qui admet pour racines x' et x''; cette équation est :

$$x^2 - (x' + x'')\,x + x'x'' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Nous pouvons la résoudre ; ce qui donne :

$$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2},$$

les deux racines sont 5 et 6; on peut donc prendre,

ou bien :

$$x' = 5$$
$$x'' = 6$$

ou bien :

$$x' = 6$$
$$x'' = 5.$$

On a deux solutions, mais à ces deux solutions correspondent deux rectangles égaux; leurs côtés seuls sont intervertis.

Problème III. — *Trouver deux nombres dont la différence soit 3 et le produit 40.*

Nous allons ramener le problème au précédent; dans ce but, nous remarquerons que la différence de deux nombres est égale à la somme du premier et d'un nombre opposé au second; nous sommes ainsi conduits à désigner le premier nombre par x et le second par $-x''$; leur différence est alors $x' + x''$ et leur produit est $-x'x''$; on a ainsi les deux équations :

$$x' + x'' = 3$$
$$x'x'' = -40.$$

Donc x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 3x - 40 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 40} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}.$$

Les deux racines sont 8 et -5; on peut prendre :

$$x' = 8$$
$$x'' = -5,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont 8 et 5. On peut prendre aussi :

$$x' = -5$$
$$x'' = +8,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont -5 et -8. On a ainsi deux solutions à la question posée.

Problème IV. — *Construire un rectangle, sachant que la somme de sa base et de sa hauteur est 2m et que sa surface est équivalente à celle d'un carré de côté d. Les longueurs m et d sont supposées mesurées avec la même unité*

Désignons par x' et x'' les côtés du rectangle, mesurés avec l'unité choisie ; on aura :

$$x' + x'' = 2m$$
$$x'x'' = d^2,$$

de sorte que x et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 2mx + d^2 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - d^2}.$$

Discussion. — Pour que la formule soit acceptable, il est nécessaire que l'on ait $m^2 - d^2 \geqq 0$, c'est-à-dire $m^2 \geqq d^2$. Comme les nombres m et d sont positifs, cette condition équivaut à $m \geqq d$, car le carré d'un nombre positif est d'autant plus grand que ce nombre lui-même est plus grand Le problème proposé n'est donc possible que si la somme $2m$ de la base et de la hauteur du rectangle cherché est supérieure à la somme $2d$ de deux côtés du carré ; en d'autres termes, si le périmètre $4m$ du rectangle

cherché est supérieur au périmètre $4d$ du carré donné

Nous pouvons exprimer cette condition sous la forme suivante : *pour qu'il soit possible de construire un rectangle de périmètre donné équivalent à un carré donné, il faut et il suffit que le périmètre donné soit supérieur au périmètre du carré.*

Dans le cas où le périmètre donné pour le rectangle est *égal* au périmètre du carré, on trouve $x' = x'' = d$, c'est-à-dire qu'une solution est fournie par le carré lui-même, ce que l'on pouvait prévoir, et que c'est *la seule*. L'équation du second degré a *une racine double;* on peut dire qu'à cette racine correspond *une solution double;* en effet, lorsque m est supérieur à d, nous pouvons dire qu'il y a deux rectangles répondant à la question ; l'un de base x' et de hauteur x'', l'autre de base x'' et de hauteur x' (ces deux rectangles sont d'ailleurs égaux), lorsque x' devient égal à x'', chacun de ces rectangles devient un carré, qui apparaît ainsi comme *solution double.*

Cette solution double a une propriété très importante, qui appartient très fréquemment aux solutions doubles : elle fait connaître le rectangle dont le périmètre est le plus petit parmi tous les rectangles de même surface. Il résulte en effet de la discussion précédente que, la surface d^2 étant donnée, le périmètre $4m$ ne peut pas être inférieur à $4d$; car si $m < d$, il n'y a pas de solution au problème posé, *la plus petite valeur de $4m$ est donc $4d$;* c'est le périmètre du carré.

On peut se placer à un autre point de vue, en regardant m comme fixe et d comme variable ; alors d doit être inférieur ou au plus égal à m; *sa plus grande valeur est m;* parmi tous les rectangles de

même périmètre $4m$, celui dont la surface est la plus grande est le carré de côté m.

Ainsi, si l'on dispose d'une clôture en fil de fer d'une certaine longueur et que l'on veuille s'en servir pour borner un terrain rectangulaire *aussi grand que possible*, on devra donner à ce terrain la forme d'un carré.

119. **Cas où les propriétés du trinome interviennent dans la discussion** PROBLÈME V. — *Un triangle et un carré ont leurs bases sur une même droite* D ; *mener à cette droite une parallèle* D′ *de manière que la somme des surfaces des parties du triangle et du carré non situées entre* D *et* D′ *soit équivalente à la surface du triangle.*

Soit ABC le triangle et MNPQ le carré donné

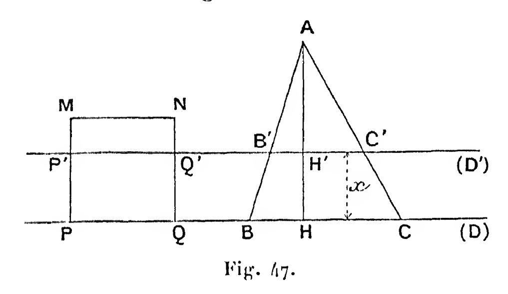


Fig. 47.

(fig. 47), AH la hauteur du triangle, P′, Q′, B′, C′, H′ les points d'intersection de D′ avec MP, NQ, AB, AC, AH. Nous pouvons regarder comme données[1] les quantités suivantes :

$$BC = a ; \quad AH = h ; \quad PQ = MP = b.$$

1. Il est clair que si l'on donnait d'autres éléments du triangle, il y aurait lieu, au préalable, de déterminer a et y au moyen de ses données.

Prenons pour inconnue x la distance des deux parallèles D et D′ :

$$PP' = QQ' = HH' = x.$$

La surface du triangle ABC est $\frac{1}{2}ah$; le rapport des surfaces des triangles semblables AB′C′ et ABC est égal au rapport des carrés de leurs hauteurs, c'est-à-dire à $\frac{(h-x)^2}{h^2}$; quant à la surface du rectangle MNP′Q′ elle est évidemment $b(b-x)$; l'équation du problème est donc :

$$\frac{1}{2} ah \frac{(h-x)^2}{h^2} + b(b-x) = \frac{1}{2} ah,$$

ou, en chassant les dénominateurs (il suffit de multiplier par $2h$) :

$$a(h-x)^2 + 2hb(b-x) = ah^2$$

(1) $$ax^2 - 2h(a+b)x + 2hb^2 = 0.$$

Telle est l'équation du problème.

Pour que cette équation admette des racines il faut que son discriminant soit positif; écrivons cette condition :

$$D = h^2(a+b)^2 - 2ahb^2 > 0.$$

Ordonnons D par rapport à b; il vient :

$$D = b^2(h^2 - 2ah) + 2h^2ab + a^2h^2 > 0$$

Comme h est positif, nous pouvons diviser par h, ce qui donne :

$$b^2(h - 2a) + 2ahb + a^2h > 0.$$

Pour résoudre cette inégalité du second degré en b, il est utile de calculer le discriminant D′ de son premier membre, on a :

$$D' = a^2h^2 - a^2h(h - 2a) = 2a^3h$$

Ce discriminant est positif, puisque a et h sont positifs ; donc l'équation :

$$D = 0$$

admet deux racines distinctes b' et b'', si l'on a :

$$h - 2a < 0,$$

ces racines sont toutes deux négatives ; donc il suffit que b soit positif, ce que nous supposons, pour que le trinome en b soit du signe de son premier terme, c'est-à-dire soit positif. Si l'on a :

$$h - 2a > 0,$$

l'une des racines b' est négative et l'autre b'' est positive ; d'ailleurs, dans ce cas, D, pour être positif, doit être de signe contraire à son premier terme, et l'on doit avoir :

$$b' < b < b''$$

ou, puisque b est positif :

$$0 < b < b''.$$

En résumé, si l'on a :

$$h > 2a,$$

l'équation (1) a des racines, quel que soit b ; si l'on a :

$$h < 2a,$$

l'équation (1) n'a de racines que si l'on a :

$$b < b'',$$

c'est-à-dire :

$$b < \frac{ah + a\sqrt{2ah}}{2a - h}.$$

Remarque. — L'on aurait pu, au lieu de résoudre par rapport à b, l'inégalité $D > 0$, la résoudre par rapport à h, ce qui pouvait paraître plus simple, car après division par $h > 0$, elle est du premier degré en h et donne :

$$h > \frac{2ab^2}{(a+b)^2},$$

mais, si l'on voulait étudier le problème *par rapport à b*, il faudrait étudier cette fraction dont les deux termes sont du second degré en b, ce que nous n'avons pas appris à faire.

Discussion. — Nous avons établi les conditions d'existence des racines pour l'équation (1); il faut maintenant rechercher si les racines, quand elles existent, satisfont bien au problème géométrique posé. En mettant le problème en équation, nous avons implicitement supposé (fig 47) que x était positif, inférieur à b et inférieur à h ; nous laisserons de côté, pour ne pas allonger indéfiniment, la question d'étudier à quels problèmes, très voisins du problème posé, conviennent les valeurs de x non comprises entre ces limites ; nous allons simplement rechercher combien l'équation (1) a de racines supérieures à 0 et inférieures à la fois à b et à h. Dans

ce but désignons par $f(x)$ le premier membre de (1), on a :

$$f(o) = 2hb^2$$
$$f(b) = ab^2 - 2h(a+b)b + 2hb^2 = ab(b-2h)$$
$$f(h) = ah^2 - 2h(a+b)h + 2hb^2 = h(2b^2 - 2bh - ah).$$

Supposons d'abord $b < h$; il faut alors que x soit compris entre o et b; or $f(o)$ est positif et $f(b)$ négatif; *il y a donc une racine et une seule qui convient*

Soit maintenant $b > h$; il faut alors que x soit compris entre o et h; ou on a :

$$f(h) = hF(b),$$

en posant :

$$F(b) = 2b^2 - 2bh - ah,$$

pour que $f(h)$ soit $> o$ il faut et il suffit que $F(b)$ soit positif; or on a :

$$F(h) = -ah < o.$$

Donc $F(b)$ admet une racine b'' supérieure à h; on a :

$$b'' = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Si l'on a :

$$h < b < b'',$$

la valeur de $f(h)$ est négative; donc il y a une racine x et une seule comprise entre o et h, et qui convient. Supposons enfin :

$$b > b'',$$

c'est-à-dire :

$$b > \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Dans ce cas, $f(o)$ et $f(h)$ sont tous deux positifs, de sorte que nous ne sommes pas assurés qu'il y a des racines; nous devrons donc supposer que les conditions précédemment trouvées pour que D soit positif sont remplies Lorqu'elles le sont, nous pouvons affirmer que les racines sont toutes deux inférieures à o, ou toutes deux comprises entre o et h, ou toutes deux supérieures à h. On distinguera ces trois cas en comparant o et h à la demi-somme qui est $\frac{h(a+b)}{a}$; or, a et b étant positifs ainsi que h, cette demi-somme est visiblement supérieure à h, de sorte qu'il n'y a pas de racines qui conviennent.

En résumé, pour que le problème géométrique posé admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait :

$$b < \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2},$$

et cette solution est d'ailleurs unique.

On peut vérifier ce résultat par un raisonnement géométrique simple; l'énoncé exprime (fig. 48) que les aires MNP'Q' et BCC'B' sont équivalentes; or, lorsque x croît à partir de zéro, la première de ces aires décroît à partir de b^2 et la seconde croît à partir de zéro; ces deux aires ne peuvent donc devenir égales que pour une position au plus de D'; il existera toujours une telle position, à moins que lorsque la droite D' passe par le sommet A du

triangle (ce qui est la position extrême qu'elle peut occuper), l'aire MNQ'P' ne soit encore supérieure à BC B'C' (qui se réduit à ABC pour cette position

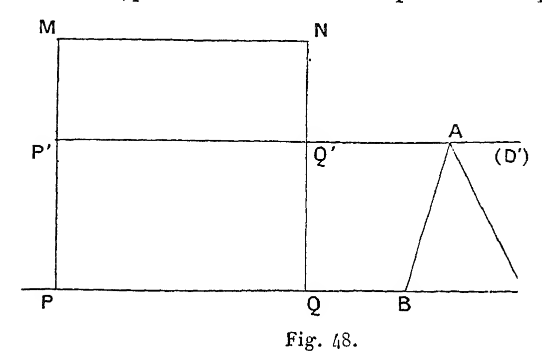


Fig. 48.

particulière de D'). Or cette condition s'exp l'égalité :

$$b(b-h) > \frac{1}{2}ah,$$

qui, résolue par rapport à b, donne, en tenant compte du fait que a et h sont positifs :

$$b > \frac{h+\sqrt{h^2+2ah}}{2}.$$

Lorsque l'on a :

$$b = \frac{h+\sqrt{h^2+2ah}}{2},$$

la solution est fournie par la droite (D') qui passe par le point A (on a $x=h$).

120. **Exemple de discussion d'un problème trigonométrique**. Problème VI. — *Soit* ABC *un triangle rectangle et* D *la projection du sommet* A

de l'angle droit sur l'hypoténuse BC. *Calculer l'angle* C *sachant que l'on a, entre les longueurs positives* CA, CD, CB, *la relation :*

$$CD + nCA + pCB = 0,$$

n, p étant des nombres donnés, positifs ou négatifs.

Si l'on remarque que l'on a :

$$CA = CB \cos C$$
$$CD = CA \cos C = CB \cos^2 C,$$

l'équation du problème est :

$$\cos^2 C + n \cos C + p = 0, \tag{1}$$

ou, en posant :

$$\cos C = x \tag{2}$$
$$x^2 + nx + p = 0. \tag{3}$$

Pour qu'une racine de (3) convienne au problème, il faut qu'elle soit comprise entre 0 et 1 (car l'angle C étant aigu, cos C est positif).

Pour que l'équation (3) ait des racines, il faut que l'on ait :

$$n^2 - 4p > 0.$$

Si l'on pose :

$$f(x) = x^2 + nx + p,$$

on a :

$$f(0) = p$$
$$f(1) = 1 + n + p.$$

La demi-somme des racines est d'ailleurs $-\frac{n}{2}$; elle est négative, comprise entre 0 et 1, ou supé-

rieure à 1, suivant que n est positif, compris entre 0 et -2, ou inférieur à -2. Ceci posé, nous allons chercher successivement les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème posé admette 2, 1 ou 0 solutions.

1° Pour qu'il y ait 2 solutions, il faut que l'on ait à la fois :

$$\begin{cases} n^2 - 4p > 0 \\ f(0) = p > 0 \\ f(1) = 1 + n + p > 0 \\ -2 < n < 0. \end{cases}$$

En effet l'équation (3) admet alors 2 racines distinctes, qui sont toutes deux inférieures à 0, ou toutes deux supérieures à 1, ou toutes deux comprises entre 0 et 1, et c'est ce dernier cas qui se présente, puisque la demi-somme est comprise entre 0 et 1.

Si l'on résout les inégalités précédentes par rapport à n, on remarque que la première donne :

ou bien : $n < -2\sqrt{p}$

ou bien : $n > 2\sqrt{p}$,

et que la première alternative est seule compatible avec l'inégalité $n < 0$. On doit donc avoir :

$$\begin{cases} p > 0 \\ n < -2\sqrt{p} \\ n > -p - 1 \\ n > -2. \end{cases}$$

l'inégalité $n < 0$ étant inutile à écrire. Il faut rechercher pour quelles valeurs de p ces inéga-

lités sont compatibles, incompatibles ou surabondantes.

Si p est supérieur à 1, $-p-1$ est inférieur à -2, et il suffit de conserver l'inégalité $n > -2$ qui entraîne $n > -p-1$; c'est l'inverse si p est inférieur à 1. Mais, si p est supérieur à 1, $-2\sqrt{p}$ est inférieur à -2 et n ne peut pas être à la fois ...ur à $-2\sqrt{p}$ et supérieur à -2. On doit donc ...er :

$$\begin{cases} 0 < p < 1 \\ -p-1 < n < -2\sqrt{p}. \end{cases}$$

...es dernières inégalités sont compatibles, car ...a :

$$-p-1 < -2\sqrt{p}.$$

Cette inégalité revient en effet à :

$$p - 2\sqrt{p} + 1 > 0,$$

c'est-à-dire :

$$(\sqrt{p} - 1)^2 > 0.$$

Les conditions (4) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème admette 2 solutions :

2° Pour qu'il y ait une solution, il est nécessaire et suffisant que $f(0)$ et $f(1)$ soient de signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait :

$$p(1 + n + p) > 0.$$

Cette inégalité exige :

ou bien :
(6) $\begin{cases} p < 0 \\ 1 + n + p < 0. \end{cases}$

Tels sont les cas où il y a *une* solution, dans les autres cas il n'y en a pas.

La discussion peut, d'après ce qui précède, être résumée dans le tableau suivant :

$p < 0$	$n > -p - 1$	0 solution.
	$n < -p - 1$	1 solution.
$0 < p < 1$	$n < -p - 1$	0 solution.
	$-p - 1 < n < -2\sqrt{p}$	2 solutions.
	$-2\sqrt{p} < n$	1 solution.
$1 < p$	$n < -p - 1$	0 solution.
	$n > -p - 1$	1 solution.

Nous laissons à l'élève le soin d'examiner les cas limites où certaines de ces inégalités se transforment en égalités.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

151. — Un champ a la forme d'un carré; on demande quel est le côté de ce carré, sachant que si l'on ajoute 2^m à l'un

des côtés et que l'on retranche 10^m à l'autre côté, on obtient un rectangle dont la superficie est 88 ares.

152. — On donne un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit ont respectivement pour longueurs 5^m et 12^m; déterminer sur l'hypoténuse un point dont la distance au sommet de l'angle droit soit égale à 6^m. On prendra pour inconnue x la distance du point cherché au sommet du triangle opposé au côté égal à 5^m.

153. — Trouver les côtés d'un triangle rectangle sachant que l'hypoténuse est égale à 15^m et la surface à 30 mètres carrés.

154. — Quelle valeur faut-il donner à t pour que le système :

$$(3+t)\,x+4y=5-3t$$
$$2x+(5+t)\,y=8$$

soit impossible ou indéterminé?

155. — Étant donnée la longueur d'un côté d'un triangle, de la hauteur correspondante, et le rayon du cercle inscrit, calculer les longueurs des deux autres côtés. Discuter.

156. — On donne le cercle circonscrit à un triangle, un côté et la somme des deux autres; calculer ces deux autres côtés. Discuter.

157. — Étant donnée une droite et deux points F et F′ non situés sur cette droite, trouver sur la droite un point M tel que l'on ait :

$$MF+MF'=2a,$$

a étant une longueur donnée. Discuter.

On désignera par P et P′ les projections de F et F′ sur la droite donnée; on posera :

$$FP=d, \qquad F'P'=d', \qquad PP'=2m; \qquad PM=x.$$

158. — Étant donné un triangle ABC, le diviser en deux parties par une parallèle au côté BC de manière que le rapport des aires de ces deux parties soit égal à un nombre donné m. Discuter.

159. — On donne une circonférence de rayon R et deux diamètres rectangulaires AB et CD; par le point A on mène une sécante faisant avec AB un angle φ; cette sécante ren-

contre CD en un point P et la circonférence en ι
(distinct de A); déterminer l'angle φ de manière que F
une longueur donnée a. Discuter.

160. — On donne une circonférence du centre O, ur
A de cette circonférence et une droite D. Mener par
droite telle qu'en désignant par P son point d'inters
avec (D) et par Q son second point d'intersection avec
conférence, on ait :

$$AP = m\, AQ$$

m étant un nombre donné; on désignera par C le point d'intersection de AO avec la droite D; par α l'angle de AO avec D, par R la longueur AO, par a la longueur AC et par x l'angle (inconnu) de APQ avec AO.

CHAPITRE VIII

ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES VARIATIONS DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

I. CAS PARTICULIERS

121. **Définitions.** — On donne le nom de fonction homographique à la fonction y définie par la relation :

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

dans laquelle a, b, a', b' sont des constantes données. La fonction homographique comprend comme cas particulier la fonction linéaire à laquelle elle se réduit lorsque l'on suppose $a' = 0$. Nous supposerons donc $a' \neq 0$, puisque la fonction linéaire a été étudiée et qu'il n'y a pas lieu d'y revenir.

Nous allons étudier d'abord le cas particulier où l'on a :

$$a = b' = 0.$$

La relation (1) devient alors :

$$y = \frac{b}{a'x},$$

et, en posant :

$$\frac{b}{a'} = c,$$

prend la forme plus simple :

$$y = \frac{c}{x}.$$

C'est cette relation que nous allons étudier, en supposant même tout d'abord, pour simplifier, $c = 1$.

122. **Étude de la courbe** $y = \frac{1}{x}$. — Nous nous proposons donc d'étudier et de représenter graphiquement les variations de la fonction y définie par la relation :

$$y = \frac{1}{x}.$$

Nous remarquerons que y a toujours le même signe que x; de plus, la valeur absolue de y est d'autant plus grande que la valeur absolue de x est plus petite, et inversement.

Ayant fait choix d'une unité de longueur, nous avons représenté (fig. 49) les abscisses suivantes :

$OC' = -4 \quad OB' = -2 \quad OA' = -1 \quad OD' = -\frac{1}{2} \quad OE' = -\frac{1}{4}$

$OC = 4 \quad OB = 2 \quad OA = 1 \quad OD = \frac{1}{2} \quad OE = \frac{1}{4}.$

Les ordonnées correspondantes ont pour valeurs :

$C'P' = -\frac{1}{4}$ $B'N' = -\frac{1}{2}$ $A'M' = -1$ $D'Q' = -2$ $E'R' = -4$

$CP = \frac{1}{4}$ $BN = \frac{1}{2}$ $AM = 1$ $DQ = 2$ $ER = 4.$

En réunissant par un trait continu les points P′, N′, M′, Q′, R′ d'une part, et les points P, N, M, Q, R

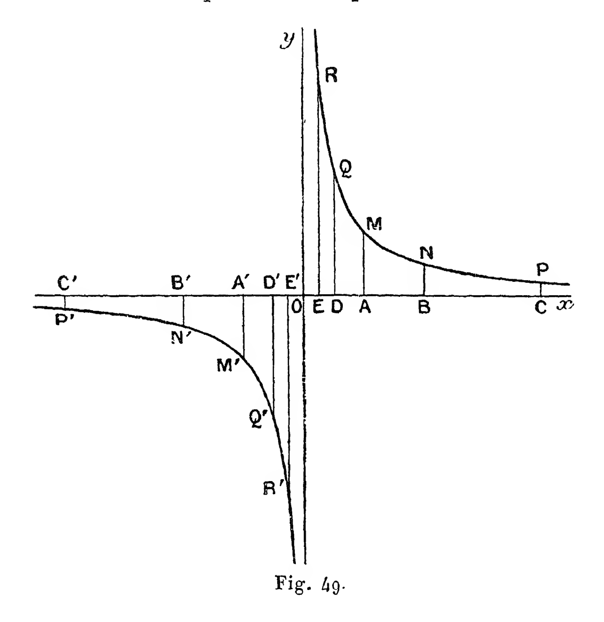


Fig. 49.

d'autre part, on a les deux arcs de courbe dessinés sur la figure. Comme ces deux arcs sont définis par la même relation, on dit qu'ils constituent *une courbe* qui a reçu le nom d'*hyperbole*.

Cette courbe a, comme la parabole, des *branches infinies;* c'est-à-dire des branches que l'on peut prolonger aussi loin que l'on veut, sans autre limite

que les dimensions du papier ou du tableau sur lesquels on les figure.

Par exemple, si l'on donne à x des valeurs positives de plus en plus grandes, le point C s'éloignera indéfiniment vers la droite et l'ordonnée CP deviendra de plus en plus petite ; il en résulte que la branche infinie ainsi obtenue se rapproche indéfiniment de l'axe Ox; on dit qu'elle admet Ox comme *asymptote*.

Définition. — *On dit qu'une branche infinie de courbe est asymptote à une droite lorsque la distance d'un point de cette branche à la droite se rapproche indéfiniment de zéro quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche.*

On verrait de même que la branche N'P' prolongée vers la gauche est aussi asymptote à Ox; et que les branches QR et Q'R' sont asymptotes à Oy. On peut aussi déduire ces propriétés des remarques que nous allons faire relativement à la symétrie de l'hyperbole.

123. **Centre et axes de symétrie.** — Figurons (fig. 50) les points N, Q, N', Q' de l'hyperbole dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau suivant :

N	$x = OB = SN = 2$	$y = BN = OS = \frac{1}{2}$
Q	$x = OD = TQ = \frac{1}{2}$	$y = DQ = OT = 2$
N'	$x = OB' = S'N' = -2$	$y = B'N' = OS' = -\frac{1}{2}$
Q'	$x = OD' = T'Q' = -\frac{1}{2}$	$y = D'Q' = OT' = -2.$

On voit que l'on a $OD = OS$; $OB = OT$; les

quadrilatères ODIS, OBJT sont donc des *carrés;* ainsi que les quadrilatères OD'I'S', OB'J'T'; il en résulte que les points I, J, I', J' sont situés sur la bissectrice de l'angle xOy; cette bissectrice coïncide

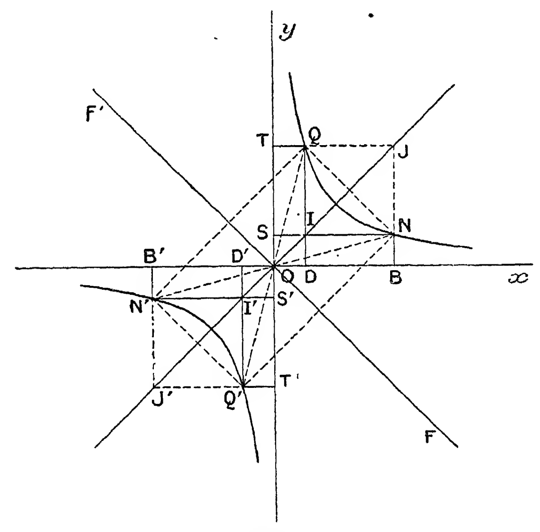


Fig. 50.

donc avec la diagonale des *carrés* NIQJ et N'I'Q'J' de telle sorte qu'elle est perpendiculaire sur le milieu de NQ et de N'Q'. La droite JOJ' est donc un *axe de symétrie* de l'hyperbole; les points N et N' sont symétriques de Q et de Q' par rapport à JOJ'.

Le point O est *centre* de l'hyperbole; c'est-à-dire qu'à tout point N correspond un point N' symétrique par rapport à O; c'est ce qui résulte de la figure.

Enfin, l'existence d'un axe de symétrie et d'un centre situé sur cet axe entraîne l'existence d'un second axe FOF′ perpendiculaire au premier et passant par le centre; c'est la bissectrice extérieure de l'angle xOy. En effet, le quadrilatère NQQ′N′ dont les côtés NQ et N′Q′ sont égaux et parallèles et dont les diagonales sont égales est un rectangle; donc FOF′ est perpendiculaire sur le milieu de NQ′ et de N′Q

Nous avons ainsi démontré l'existence d'un et de deux axes de symétrie rectangulaires

124. **Étude de la courbe** $y = \frac{c}{x}$. — C

d'abord le cas où $c = -1$, c'est-à-dire (

relation :

$$y = -\frac{1}{x}.$$

La discussion est tout à fait analogue à celle qui vient d'être faite; la seule différence est que y sera toujours de signe contraire à celui de x, de sorte que la courbe, au lieu de se trouver dans l'angle xOy et son opposé par le sommet, sera dans les deux autres angles formés par les axes (fig. 51); à l'abscisse positive OA correspond une ordonnée négative AP; et à l'abscisse négative OB′ une ordonnée positive B′Q′; il n'y a rien à changer à ce que nous avons dit relativement aux asymptotes, au centre et aux axes de symétrie.

Supposons maintenant que nous ayons la courbe représentée par l'équation :

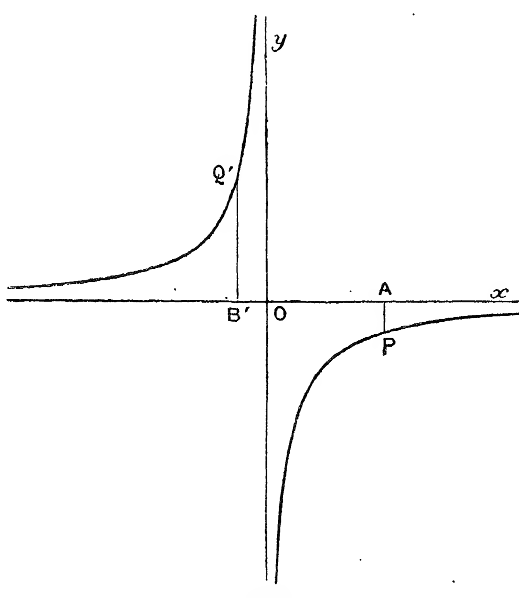


Fig. 51.

c étant positif; nous pourrons poser $c = a^2$, a étant positif et égal à $\sqrt{c}$; nous aurons donc :

$$y = \frac{a^2}{x},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}}.$$

Cette courbe sera la même que la courbe

$$y = \frac{1}{x},$$

si on les construit avec des unités de longueur dont le rapport est égal à a. Si, par exemple, $a = 10$, la courbe

$$\frac{1}{10}y = \frac{1}{\frac{1}{10}x}$$

construite en prenant pour unité le millimètre coïncidera avec la courbe :

$$y = \frac{1}{x},$$

construite en prenant pour unité le centimètre. En effet, pour $x = 5^{mm}$, c'est-à-dire $x = 0^{cm},5$, on a dans le premier cas $y = 20^{mm}$, et dans le second $y = 2^{cm}$, ce qui est la même chose.

Si l'on avait à construire la courbe

$$y = \frac{c}{x},$$

dans laquelle c serait négatif, on poserait $c = -a^2$, en désignant par a un nombre positif égal à $\sqrt{-c}$ (car $-c$ est positif) et on aurait :

$$\frac{y}{a} = \frac{-1}{\frac{x}{a}},$$

c'est-à-dire une courbe égale à la courbe

$$y = \frac{-1}{x},$$

avec un changement convenable de l'unité de longueur.

II. CAS GÉNÉRAL

125. Remarques préliminaires. — La fonction homographique est définie par la relation :

$$(1) \qquad y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs et que l'on fasse passer tous les termes dans le premier membre, cette relation prend la forme :

$$(2) \qquad a'xy + b'y - ax - b = 0,$$

c'est la *relation homographique générale à deux variables x et y;* on appelle ainsi une relation du *premier degré* par rapport à *chacune* des variables x et y considérées *séparément* (mais non du premier degré par rapport à l'ensemble; ceci n'a lieu que si a' est nul).

Inversement, toute relation homographique à deux variables a la forme :

$$Axy + Bx + Cy + D = 0,$$

et on peut la résoudre, soit par rapport à y; soit par rapport à x, ce qui donne :

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}$$

$$x = -\frac{Cy + D}{Ay + B}.$$

On voit que x est une fonction homographique de y et y une fonction homographique de x. A toute valeur de x correspond *une* valeur de y et

une seule, et inversement à toute valeur de y correspond une valeur de x et une seule.

En particulier la relation homographique (2), que nous avons déduite de (1), donne :

$$x = \frac{-b'y + b}{a'y - a}, \tag{3}$$

relation utile pour l'étude de (1).

Si dans la relation (1) nous donnons à x deux valeurs différentes x_1 et x_2 et si nous désignons par y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y, nous obtenons les relations :

$$y_1 = \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}$$

$$y_2 = \frac{ax_2 + b}{a'x_2 + b'}$$

qui donnent, par soustraction :

$$y_2 - y_1 = \frac{ax_2 + b}{a'x_2 + b'} - \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'} =$$

$$\frac{(ax_2 + b)(a'x_1 + b') - (ax_1 + b)(a'x_2 + b')}{(a'x_2 + b')(a'x_1 + b')},$$

ou, après une réduction facile :

$$y_2 - y_1 = \frac{(ab' - ba')(x_2 - x_1)}{(a'x_2 + b')(a'x_1 + b')}. \tag{4}$$

On voit que le signe de $y_2 - y_1$ dépend des signes de $x_2 - x_1$, de $a'x_2 + b'$, de $a'x_1 + b'$ et de $ab' - ba'$; nous reviendrons bientôt sur les conséquences de cette formule importante. Pour l'instant, nous

remarquerons que si l'on a :

$$(5) \qquad ab' - ba' = 0,$$

il en résulte :

$$y_2 - y_1 = 0,$$

à moins que x_1 ou x_2 n'aient des valeurs particulières telles que le dénominateur de la formule (4) ne soit nul en même temps que le numérateur. Lorsque la relation (5) est vérifiée on dit que l'on se trouve dans un *cas singulier* ou que la relation homographique donnée est *singulière*. Nous allons écarter provisoirement ce cas, dont nous dirons quelques mots à la fin du chapitre.

Il ne faut pas confondre les expressions *cas singulier* et *cas particulier;* on y attache des sens très différents. Tout cas *déterminé* est, en un sens, particulier; c'est-à-dire que si l'on donne à a, b, a', b' des valeurs numériques telles que 12, 15, — 3, 7, on a un *cas particulier* de la fonction homographique; mais, comme nous le verrons, dans ces divers cas particuliers, comme dans les cas particuliers que nous avons étudiés, les propriétés de la fonction et de la courbe qui la représente sont, au fond, les mêmes, et l'étude approfondie d'un de ces cas particuliers est à peu près aussi instructive que celle du cas général. La courbe représentative est toujours une hyperbole.

Au contraire, on donne le nom de *cas singuliers* aux cas où, par suite d'une relation spéciale entre a, b, a', b' les propriétés de la fonction sont profondément modifiées et la représentation géométrique n'en est plus fournie par une hyperbole. D'ailleurs, parmi l'ensemble des *cas singuliers* définis par la relation (5), on peut distinguer autant de cas particuliers qu'il est possible de donner à a, b, a', b', de valeurs numériques particulières vérifiant cette relation.

126. Étude des variations de la fonction homo-

graphique. — La fonction homographique :

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

est égale au quotient de deux fonctions linéaires; dans l'étude des variations d'une telle fonction, *quotient* de deux fonctions simples, on doit tout d'abord porter son attention sur *la ou les valeurs de la variable pour lesquelles le dénominateur est égal à zéro*, ou, plus brièvement, sur *les zéros du dénominateur*. En effet, pour ces valeurs la fonction devient généralement infinie, ce qui est évidemment l'une des circonstances les plus remarquables dans l'étude de ses variations.

Ici, le dénominateur de y est nul si l'on a :

$$a'x + b' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x = -\frac{b'}{a'}.$$

Nous poserons :

$$x' = -\frac{b'}{a'},$$

c'est-à-dire que nous désignerons par x' la valeur de x pour laquelle le dénominateur de y s'annule. On remarquera que cette valeur existe toujours puisqu'on a supposé $a' \neq 0$. De plus, elle n'annule pas le numérateur; pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'on ait :

$$ax' + b = 0,$$

c'est-à-dire :

$$b'$$

ou enfin :

$$ab' - ba' - o,$$

c'est-à-dire que la fonction fût *singulière*, cas que nous avons écarté. Donc pour $x = x'$, le dénominateur de y devient égal à zéro et le numérateur ne devient pas égal à zéro; donc y devient infini. Pour cette raison, nous dirons que x' est *un infini* ou *un pôle* de y.

Définition. — On appelle *infinis* ou *pôles* d'une *fraction rationnelle*, les valeurs de la variable qui, annulant le dénominateur de cette fraction sans annuler le numérateur, la rendent infinie.

Théorème. — *La fonction homographique non singulière admet toujours un pôle et un seulement :* $\frac{-b'}{a'}$.

Ceci posé, reprenons la formule déjà obtenue :

$$(4) \qquad y_2 - y_1 = \frac{(ab' - ba')(x_2 - x_1)}{(a'x_2 + b')(a'x_1 + b')}.$$

Supposons d'abord que l'on ait :

$$x_2 > x_1 > x'.$$

Dans ce cas $a'x_2 + b'$ et $a'x_1 + b'$ sont tous deux du signe de a', c'est-à-dire tous deux du même signe; leur produit est positif; $x_2 - x_1$ est aussi positif par hypothèse; *donc* $y_2 - y_1$ *a le signe de* $ab' - ba'$.

Si l'on avait :

$$x_1 < x_2 < x',$$

on arriverait à la même conclusion; car $a'x_1 + b'$

et $a'x_2 + b'$ étant tous deux de signe opposé au signe de a' auraient encore tous deux le même signe et leur produit serait encore positif. On arrive donc au résultat suivant.

THÉORÈME. — *Lorsque l'on suppose que x varie, soit en restant constamment supérieur au pôle x', soit en lui restant constamment inférieur, la fonction homographique est toujours croissante ou toujours décroissante suivant que $ab' - ba'$ est positif ou négatif.*

Pour pouvoir étudier complètement la variation de y il reste à examiner ce qui se passe lorsque x devient infini; or on a :

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}}$$

Lorsque x devient de plus en plus grand, $\frac{b}{x}$ et $\frac{b'}{x}$ deviennent très petits en valeur absolue (voir p. 155) et y diffère très peu de $\frac{a}{a'}$. On dira brièvement que, pour $x = \pm\infty$, y est égal à $\frac{a}{a'}$; *cela signifie que y diffère d'autant moins de $\frac{a}{a'}$ que la valeur absolue de x est plus grande.*

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour étudier la variation de y; nous pourrons former le tableau suivant, en distinguant deux cas suivant que $ab' - ba'$ est positif ou négatif.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

on suppose essentiellement

$$a' \neq 0 \qquad ab' - ba' \neq 0$$

et l'on pose

$$x' = -\frac{b'}{a'}$$

x	$-\infty$	,	croît	,	x'	,	croît	,	$+\infty$
$ab' - ba' > 0$ y	$\frac{a}{a'}$	,	croît	,	∞	,	croît	,	$\frac{a}{a'}$
$ab' - ba' < 0$ y	$\frac{a}{a'}$	,	décroît	,	∞	,	décroît	,	$\frac{a}{a'}$

Pour la valeur x', y est infini; dans le cas où $ab' - ba'$ est positif, y est croissant; donc lorsque x prend des valeurs inférieures à x', y devient infini par valeurs positives; de plus, y étant encore croissant lorsque x dépasse x', il est nécessaire que y ait alors des valeurs négatives très grandes en valeur absolue, pour s'éloigner de l'infini en croissant. On exprime ce fait en disant que *y passe de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x traverse en croissant la valeur x'*. Au contraire si $ab' - ba'$ est négatif, y passe de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x traverse en croissant la valeur x'. Ceci sera rendu plus clair par la représentation géométrique.

127. **Représentation géométrique.** — Il est en effet très aisé de représenter géométriquement la variation de y, en distinguant deux cas suivant que $ab' - ba'$ est positif ou négatif (fig. 52 et 53). Figu-

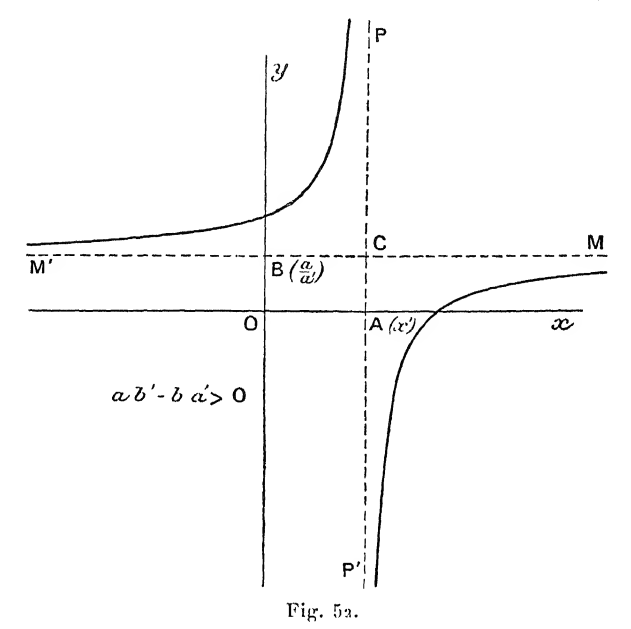


Fig. 52.

rons sur Ox le point A dont l'abscisse en x', sur Oy le point B dont l'ordonnée est $\frac{a}{a'}$ (on aura de petites différences de figure suivant que ces quantités seront positives ou négatives ; nous ne pouvons représenter ici tous les cas ; l'élève les trouvera aux Exercices) ; menons P'AP parallèle à Oy et M'BM parallèle à Ox ; ces droites se coupent en un

point C. Lorsque x est très grand en valeur absolue et négatif, la valeur de y est très voisine de $\frac{a}{a'}$; la courbe s'approche donc indéfiniment de la droite

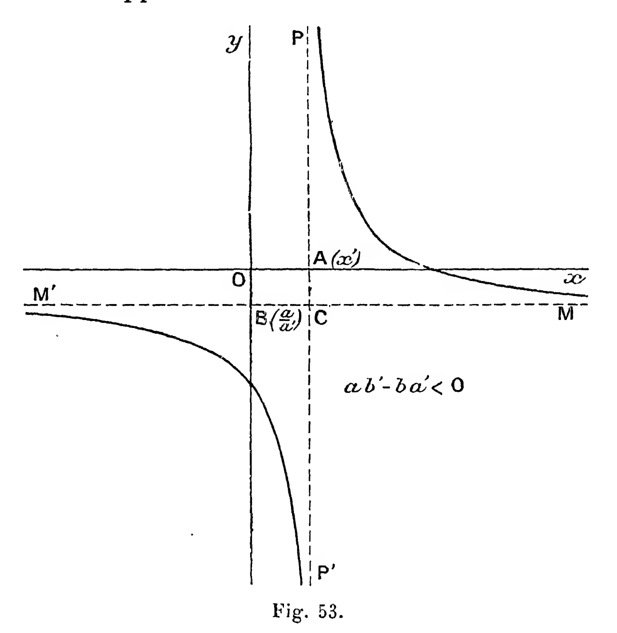


Fig. 53.

M'B; elle est *asymptote* à cette droite; d'ailleurs, suivant le signe de $ab' - ba'$ nous savons que y croît ou décroît constamment; de là résulte que si $ab' - ba'$ est positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote; c'est le contraire si $ab' - ba'$ est négatif. Lorsque x croît, depuis $-\infty$ jusqu'à x', y continue à varier toujours dans le même sens; pour $x = x'$, y devient infini, c'est-à-dire s'approche

indéfiniment de l'asymptote P'AP. On discute de la même manière pour les valeurs de x comprises entre x' et $+\infty$.

128. — Nous allons appliquer les résultats précédents à des exemples numériques. Dans ces applications, il est utile, pour éviter des erreurs, de déterminer le signe de y pour chaque valeur de x, en déterminant les signes du numérateur et du dénominateur. Cela n'est pas indispensable, *les considérations qui précèdent étant suffisantes et ayant pour conséquence cette détermination;* mais, en arrivant au même résultat par plusieurs voies, on se prémuni contre la possibilité d'erreurs de calculs ou de raisonnements.

I. Soit à étudier la fonction :

$$y = \frac{2x - 3}{4x - 1}.$$

Le numérateur s'annule pour $x = \frac{3}{2}$; il est positif pour $x > \frac{3}{2}$ et négatif pour $x < \frac{3}{2}$; quant au dénominateur, il s'annule pour $x = \frac{1}{4}$; il est positif pour $x > \frac{1}{4}$ et négatif pour $x < \frac{1}{4}$. Pour $x = \infty$, la valeur de y est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; enfin $ab' - ba' = -2 + 12 = 12 > 0$. On peut ainsi former le tableau suivant :

x	$-\infty$	croît	$\frac{1}{4}$	croît	$\frac{3}{2}$	croît	$+\infty$
$2x-3$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$4x-1$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	$\frac{1}{2}$	$+$ croît	$\pm\infty$	$-$ croît	0	$+$ croît	$\frac{1}{2}$

Ce tableau contient visiblement des indications surabondantes, ce qui constitue une vérification; par exemple, y partant de la valeur $\frac{1}{2}$ et allant en croissant, doit nécessairement être positif, comme le tableau l'indique, etc. La représentation graphique

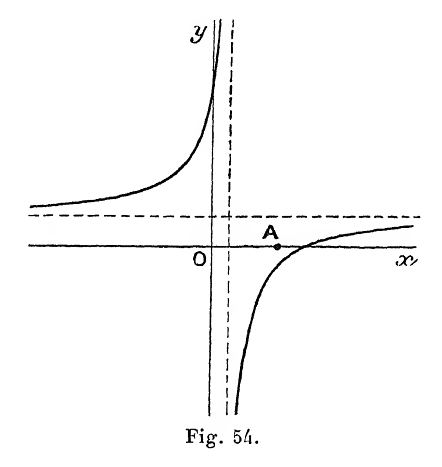


Fig. 54.

est aisée d'après ce tableau; nous n'y insistons pas (fig. 54). On a pris OA comme unité de longueur.

II. Soit la fonction :

$$y = \frac{-2x + 1}{x + 2},$$

ici le numérateur change de signe pour $x = \frac{1}{2}$, le

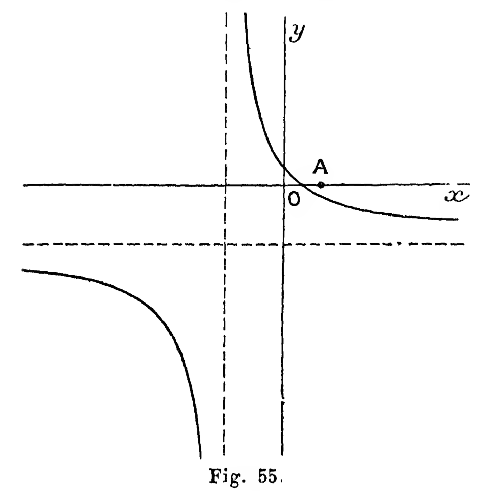


Fig. 55.

dénominateur pour $x = -2$, $ab' - ba' = -4 - 1 = -5$ est négatif, et y est égal à -2 pour $x = \pm\infty$; on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	croît	-2	croît	$\frac{1}{2}$	croît	$+\infty$
$-2x + 1$	$+\infty$	$+$	$+$	$-$	0	$-$	∞
$x + 2$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	-2	$-$	$-$	$+$	0		
		décroît	$-\infty$	décroît		décroît	-2

et la représentation graphique s'en déduit aisément (fig. 55). On a pris OA comme unité de longueur.

129. **Emploi du changement d'origine.** — On peut arriver à la construction de la courbe :

$$(1) \qquad y = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

par une méthode plus simple, basée sur un *changement* d'origine analogue à celui que nous avons utilisé pour la parabole.

On remarque que l'on a :

$$y - \frac{a}{a'} = \frac{ax+b}{a'x+b'} - \frac{a}{a'} = \frac{ba'-ab'}{a'(a'x+b')}.$$

On a d'ailleurs :

$$a'x+b' = a'\left(x+\frac{b'}{a'}\right) = a'(x-x'),$$

en posant ·

$$(2) \qquad x' = -\frac{b'}{a'},$$

si l'on pose, de plus :

$$(3) \qquad \frac{a}{a'} = y',$$

l'équation précédente devient :

$$y - y' = \frac{ba'-ab'}{a'^2(x-x')},$$

c'est-à-dire :

en posant :

$$(4) \qquad c = \frac{ba' - ab'}{a'^2} = -\frac{ab' - ba'}{a'^2}.$$

La relation (1) se ramène donc à la forme (5), si l'on définit les quantités x', y', c en fonction de a, b, a', b' par les relations (2), (3) et (4). Ceci suppose simplement $a' \neq 0$; de plus si $ab' - ba'$ n'est pas nul, c n'est pas nul.

Or, si l'on prend pour origine O′ le point de coordonnées $x = x'$, $y = y'$, et que l'on mène par O′ des axes O′X, O′Y parallèles à Ox, Oy, il est visible que l'on a :

$$X = x - x'$$
$$Y = y - y'$$

en désignant par X, Y les coordonnées *par rapport aux axes* O′X, O′Y du point dont les coordonnées sont x, y par rapport aux axes Ox, Oy Il en résulte que l'équation (5) peut s'écrire :

$$Y = \frac{c}{X},$$

c'est-à-dire rentre dans le cas particulier que nous avons étudié en premier lieu. L'équation proposée représente donc une hyperbole ayant pour centre le point O′ et pour asymptotes les droites O′X, O′Y.

Application. — Appliquons ceci à l'équation :

$$y = \frac{x - 2}{2x - 1},$$

il vient :

$$y - \frac{1}{2} = \frac{x - 2}{2x - 1} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

on a donc :

$$Y = \frac{-\frac{3}{4}}{X}$$

si l'on pose :

$$Y = y - \frac{1}{2}; \qquad X = x - \frac{1}{2}.$$

Nous laissons à l'élève le soin de faire la figure. On pourrait faire la discussion par cette méthode, la relation (4) montre que, a'^2 étant positif, c est de signe opposé à $ab' - ba'$.

130. **Cas singulier.** — Nous allons, pour terminer, dire quelques mots du cas singulier que nous avons laissé de côté, c'est-à-dire du cas où l'on a :

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0.$$

Supposons que l'on ait :

$$a' \neq 0,$$

nous pouvons toujours poser :

$$a = ma',$$

c'est-à-dire désigner par m le quotient $\frac{a}{a'}$; la relation (6) devient alors :

$$ma'b' - ba' = 0,$$

c'est-à-dire, puisque a' n'est pas nul :

$$b = mb'.$$

On a donc identiquement :

$$ax + b = ma'x + mb' = m(a'x + b'),$$

et l'expression de y devient :

$$y = \frac{m(a'x + b')}{a'x + b'}.$$

Si l'on donne à x une valeur telle que $a'x + b$ ne soit pas nul, on a :

$$y = m.$$

Si, au contraire, on suppose $a'x + b' = 0$, y est visiblement indéterminé.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant l'équation résolue en x :

$$x = \frac{b - b'y}{a'y - a}.$$

On peut poser :

$$b' = -ha',$$

et la relation (6) donne alors :

$$b = -ha.$$

On en conclut :

$$x = \frac{h(a'y - a)}{a'y - a},$$

c'est-à-dire que x est égal à h si y est différent de $\frac{a}{a'} = m$ et indéterminé si $y = \frac{a}{a'} = m$.

En résumé, lorsque la relation homographique est singulière, y prend toujours la même valeur m, sauf pour $x = h$, valeur pour laquelle y est indéterminé; inversement, si l'on donne y, x est égal à h, sauf pour $y = m$, valeur pour laquelle x est indéterminé.

On pourrait déduire les résultats précédents de la relation (5) qui, si on y remplace x' par h et y' par m, devient, en chassant les dénominateurs :

$$(x - h)(y - m) = c$$

Or si l'on a $ab' - ba' = 0$, il en résulte $c = 0$ et la relation précédente devient :

$$(x - h)(y - m) = 0.$$

Telle est la forme que prend la relation homographique singulière.

Cette relation est vérifiée :

soit pour $x = h$ quel que soit y
soit pour $y = m$ quel que soit x.

Géométriquement une telle relation est représentée par l'ensemble des deux droites :

$$x = h$$
$$y = m.$$

L'hyperbole se réduit à ses asymptotes (voir Exercice 170).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VIII

161. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{2}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

162. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{-35\,000}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le dixième de millimètre.

163. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{0,002}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le mètre.

164. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{-4,5}{x}$$

et la droite :

$$y = -x + 2$$

en prenant pour unité le centimètre; mesurer les abscisses de leurs points communs et vérifier qu'elles sont égales aux racines de l'équation :

$$\frac{-4,5}{x} = -x + 2.$$

165. — Même question pour l'hyperbole :

$$y = \frac{300}{x}$$

et la droite :

$$y = x + 25$$

en prenant le millimètre pour unité.

166. — Résoudre les deux questions précédentes en se servant de papier quadrillé.

167. — Étudier les variations de la fonction :

$$y = \frac{3x + 1}{x - 4},$$

et les représenter graphiquement en prenant pour unité le centimètre.

168. — Étudier les variations de la fonction :

$$y = \frac{-200}{x - 10},$$

et les représenter graphiquement; on prendra pour unité le millimètre.

169. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{x - 2}{3x - 1},$$

en prenant le centimètre pour unité.

170. — Construire l'hyperbole :

$$(y - 2)(x - 1) = \lambda,$$

en prenant le centimètre pour unité; on donnera successivement à λ les valeurs suivantes :

$$\lambda = -10 \qquad \lambda = 10$$
$$\lambda = -4 \qquad \lambda = 4$$
$$\lambda = -1 \qquad \lambda = 1$$
$$\lambda = -\frac{1}{4} \qquad \lambda = \frac{1}{4}$$
$$\lambda = -\frac{1}{10} \qquad \lambda = \frac{1}{10}$$
$$\lambda = 0.$$

On représentera toutes les courbes sur la même figure (en conservant les mêmes axes Ox, Oy).

CHAPITRE IX

NOTIONS SUR LES DÉRIVÉES

I. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

131. **Définition.** — Soit y une fonction d'une variable x; pour fixer les idées, considérons, par exemple, la fonction suivante :

$$(1) \qquad y = 2x^2 - 5x + 4.$$

Désignons par $x + \Delta x$ une nouvelle valeur de la variable et par $y + \Delta y$ la valeur correspondante de la fonction; c'est-à-dire posons :

$$(2) \qquad y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 4.$$

La relation (2) se déduit de la relation (1) en y donnant à x l'*accroissement* Δx et en désignant par Δy l'*accroissement* correspondant de y.

Si nous retranchons membre à membre les relations (1) et (2) nous obtenons :

$$\Delta y = 4x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x,$$

et, en divisant par Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 5 + \Delta x. \qquad (2)$$

Nous avons ainsi exprimé au moyen de x et de Δx le rapport des accroissements correspondants de y et de x. Si l'on suppose que ces accroissements *tendent vers zéro*, c'est-à-dire deviennent de plus en plus petits, x restant fixe, le second membre pour $\Delta x = 0$ se réduit à $4x - 5$, de sorte que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diffère d'autant moins de $4x - 5$ que Δx est plus voisin de zéro. Cette expression $4x - 5$ est ce que l'on appelle la *dérivée* de la fonction y considérée; on la désigne par la notation $\frac{dy}{dx}$ (que l'on énonce *dy sur dx*[1]) ou par la notation y' (que l'on énonce *y prime*). Ainsi, *par définition*, la relation (2) entraîne les suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$
$$y' = 4x - 5,$$

qui s'en déduisent en remplaçant dans le premier membre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ par $\frac{dy}{dx}$ ou y' et dans le second membre Δx par zéro.

---

1. Dans la notation $\frac{dy}{dx}$, les élèves doivent regarder les quatre lettres et le trait horizontal constituant cette notation comme *formant un tout inséparable;* ceux d'entre eux qui apprendront plus tard le calcul différentiel verront qu'il peut y avoir utilité dans certains cas à regarder cette expression comme le *quotient* de dy par dx; mais ceci n'a de sens que lorsqu'on a défini dy et dx, ce qui ne peut être fait ici.

DÉFINITION. — *On appelle dérivée d'une fonction y ce que devient l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y à l'accroissement correspondant de la variable x, lorsque dans ce rapport, exprimé au moyen de x et de Δx, on remplace Δx par zéro.*

132. **Signification géométrique de la dérivée.** — Représentons graphiquement la fonction y dont nous venons de calculer la dérivée. Dans ce but, traçons (fig. 56) deux axes rectangulaires Ox, Oy, choisissons une unité de longueur OA pour les abscisses et une unité *égale* OB pour les ordonnées. Soit M le point de la courbe qui correspond à l'abscisse x et l'ordonnée y; M′ le point de la courbe qui correspond à l'abscisse $x + \Delta x$ et à l'ordonnée $y + \Delta y$. Nous savons que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à la *pente* de la droite MM′; si nous supposons que Δx devienne de plus en plus petit le point M′ se rapprochera de plus en plus de M; la sécante MM′ prendra la position MM″ et viendra finalement se confondre avec la tangente MT au point M de la courbe considérée; c'est la

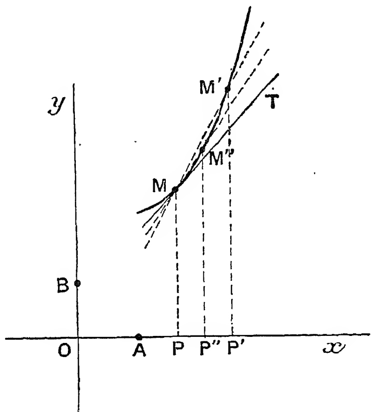


Fig. 56.

définition même de la tangente, que nous rappelons.

Définition. — *On appelle tangente à une courbe en un point* M *ce que devient une sécante* MM′ *rencontrant la courbe en* M *et en un point voisin* M′ *lorsque ce point* M′ *s'étant rapproché de plus en plus du point* M *vient se confondre avec lui.*

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à la pente de MM′; c'est ce que l'on peut appeler la *pente moyenne* de la courbe dans l'intervalle MM′; lorsque M′ se confond avec M, cette pente moyenne devient, par définition, la *pente de la courbe en* M; c'est la pente de la tangente en M; elle est égale à la dérivée de y, puisque c'est la valeur que prend l'expression de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsqu'on y remplace Δx par zéro. Telle est la *signification géométrique de la dérivée;* on peut la résumer dans l'énoncé suivant.

Théorème. — *Lorsque l'on représente graphiquement les variations d'une fonction y de la variable x, en ayant soin de prendre la même unité de longueur pour les abscisses et pour les ordonnées, la dérivée de y pour une valeur quelconque de x est égale à la pente de la tangente à la courbe représentative au point correspondant.*

133. **Application des dérivées à l'étude de la variation des fonctions.** — Nous avons déjà dit ce que l'on entend par fonction *croissante, décroissante* ou *constante* dans un intervalle.

Lorsqu'une fonction est croissante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est positif; lorsqu'une fonction est décroissante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est néga-

tif; enfin, si la fonction est constante, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est nul.

Si l'on se reporte à la figure de la page 309, on voit que la pente de MM′ est positive lorsque la fonction est croissante; donc la pente de MT est généralement positive, et pourrait exceptionnellement être nulle, ce qui à lieu sur les figures 57 et 58. De même, si la fonction y est décroissante, sa dérivée est négative et peut exceptionnellement être nulle. Sur la figure 58, on a représenté plusieurs courbes; en N la fonction décroît; en M elle croît; en S elle croît aussi, bien que la dérivée soit nulle. Enfin, en P et Q la dérivée est nulle; au point P la fonction qui était décroissante avant P (de N en P) devient croissante après P (de P en M); au point Q c'est le contraire. Le point P correspond à un *minimum* et le point Q à un *maximum*.

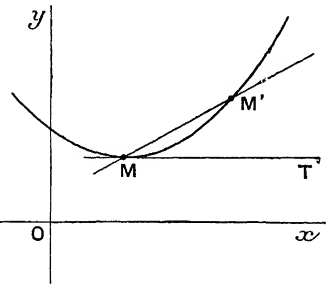


Fig. 57.

Définitions. — On dit qu'une fonction y est *maximum* pour une valeur particulière de x, lorsque sa valeur est *supérieure aux valeurs voisines;* elle est *minimum* lorsque sa valeur est *inférieure aux valeurs voisines*. Les maxima et minima ainsi définis sont appelés quelquefois maxima et minima *relatifs*, quand on veut les distinguer des maxima et minima *absolus*. Mais lorsqu'on emploie sans épithète les mots « maximum » ou « minimum », il s'agit tou-

jours d'un maximum ou d'un minimum relatif. On

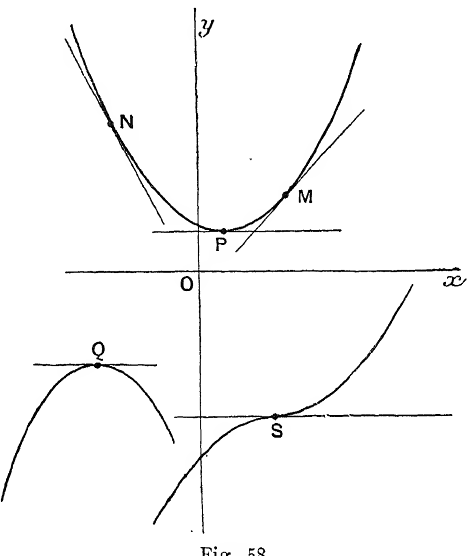


Fig. 58.

peut résumer ainsi les résultats que nous venons de déduire de l'étude des figures [1].

Théorème I. — *Lorsqu'une fonction est crois-*

---

1. Il est clair que les résultats que nous énonçons, et que nous avons obtenus par la représentation graphique, ne sont démontrés que dans les cas où cette représentation graphique s'applique, *ce qui est le cas pour toutes les fonctions simples que l'on a à considérer dans les éléments.* Pour ces fonctions simples, la représentation géométrique donne une courbe continue, ayant en chaque point une tangente, cette tangente elle-même variant d'une manière continue; les fonctions ainsi définies ont un nombre limité de zéros, d'infinis, de maxima et de minima. Lorsque l'on ne fait pas toutes ces hypothèses, c'est-à-dire quand on considère les fonctions les plus générales, la démonstration des théorèmes devient plus malaisée et sort complètement de notre cadre.

sante dans un intervalle, sa dérivée est positive, en un nombre limité de points exceptionnels oi peut être nulle; lorsqu'une fonction est décroissante dans un intervalle, sa dérivée est négative, sauf en un nombre limité de points exceptionnels où elle peut être nulle; lorsqu'une fonction est constante dans un intervalle, sa dérivée est constamment nulle.

Théorème II. — *Réciproquement, lorsque dans un intervalle, la dérivée d'une fonction est positive, la fonction est croissante; lorsque la dérivée est négative, la fonction est décroissante; lorsque la dérivée est nulle, la fonction est constante.*

Théorème III. — *Lorsque la dérivée est nulle pour une valeur particulière de la variable, on doit rechercher si, en s'annulant, elle change ou non de signe. Si la dérivée passe du négatif au positif en s'annulant lorsque la variable croît, la fonction d'abord décroissante devient croissante : elle passe par un* minimum; *si la dérivée passe du positif au négatif, la fonction passe par un* maximum; *enfin, si la dérivée ne change pas de signe, la fonction reste croissante ou décroissante suivant que la dérivée est positive ou négative.*

134. **Calcul des dérivées de fonctions simples.**

I. *Fonction linéaire.* — Soit :

$$y = ax + b,$$

la fonction linéaire; on a (n° 91) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

La valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ne dépend pas de* Δx; elle reste la

même lorsque l'on suppose $\Delta x = 0$; on a donc :

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

II. *Fonction du second degré.* — Soit :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On a :

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c,$$

et, en retranchant :

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x.$$

En remplaçant Δx par zéro dans le second membre, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

III. *Fonction du troisième degré.* — Soit :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On a :

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d \\ &= ax^3 + 3ax^2\Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3 \\ &\quad + bx^2 + 2bx\Delta x + b(\Delta x)^2 + cx + c\Delta x + d \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 2bx + c + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x,$$

et, en remplaçant Δx par zéro dans le second membre :

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Nous avons ainsi vérifié pour les trois premiers degrés, les seuls pour lesquels nous aurons à l'utiliser, la règle suivante, que nous énoncerons d'une manière générale.

Règle. — *La dérivée d'un polynome est un polynome qui se déduit du polynome donné en multipliant le coefficient de chaque terme par l'exposant de la variable dans ce terme, et en diminuant cet exposant d'une unité.* En particulier le terme constant se trouve supprimé, car l'exposant de la variable y est égal à zéro et le produit du coefficient par zéro est zéro.

IV. *Fonction homographique.* — Soit :

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

on a :

$$\Delta y = \frac{a(x+\Delta x)+b}{a'(x+\Delta x)+b'} - \frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{(ab'-ba')\Delta x}{[a'(x+\Delta x)+b'](a'x+}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b'+a'\Delta x)\,(a'x+b')},$$

et, par suite :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}.$$

Telle est la dérivée de la fonction homographique; nous ne traduirons pas cette formule en langage ordinaire parce qu'il n'est pas nécessaire de la retenir; un calcul simple donnera la dérivée de chaque fonction homographique particulière.

En particulier, si l'on a :

$$y = \frac{1}{x},$$

la formule ou le calcul direct donnent :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2},$$

formule utile à retenir.

V. *Fonctions trigonométriques élémentaires.* — Soit :

$$y = \cos x,$$

on a :

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Lorsque Δx devient égal à zéro, il en est de même de $\frac{\Delta x}{2}$ et le rapport :

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

devient égal à l'unité; on a donc :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Soit maintenant :

$$y = \sin x,$$

on a :

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

et un calcul analogue donne :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Soit enfin :

$$y = \operatorname{tg} x.$$

On a :

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x + \Delta x}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x)\cos x}$$

Donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x},$$

et enfin :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Résumons les résultats de ce paragraphe en un tableau (voir p. 318).

135. **Application à l'étude de la variation des fonctions simples.** — I. Considérons d'abord le trinome :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right).$$

Si a est *positif*, la dérivée est négative pour $x < -\frac{b}{2a}$ et positive pour $x > -\frac{b}{2a}$; pour $x = -\frac{b}{2a}$, y est *minimum*. Si a est *négatif*, y est maximum pour $x = -\frac{b}{2a}$. Ces résultats concordent avec ceux

TABLEAU DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES	
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = ax^2 + bx + c$	$y' = 2ax + b$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$y' = 3ax^2 + 2bx + c$
$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$	$y = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

que l'on a déduits de l'étude directe du trinome.

II. Soit à étudier les variations de la fonction :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9.$$

La dérivée est un trinome du second degré dont les zéros sont :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 27}}{3} = \frac{6 \pm 3}{3} = 2 \pm 1,$$

c'est-à-dire 1 et 3; la dérivée est donc positive pour $x < 1$ et pour $x > 3$ et négative lorsque x est compris entre 1 et 3. Donc pour $x = 1$, y est maximum; sa valeur est :

$$1 - 6 + 9 + 5 = 9.$$

Pour $x = 3$, y est minimum; sa valeur est :

$$27 - 54 + 27 + 5 = 5.$$

D'ailleurs, on voit aisément que pour $x = 0$, $y = 5$, que pour $x = -\infty$, $y = -\infty$, et pour $x = +\infty$, $y = +\infty$, car lorsque x est très grand en valeur absolue, le terme le plus grand est x^3, dont le signe est le même que celui de x; exemple pour $x = -100$, on a :

$$y = -1\,000\,000 - 60\,000 - 900 + 5 < 0$$

et pour $x = +100$:

$$y = 1\,000\,000 - 60\,000 + 900 + 5 > 0.$$

On conclut de ce qui précède que la courbe représentative de la fonction y a la forme suivante (fig. 59).

On voit sur la figure 59 que le maximum A n'est pas un maximum *absolu;* en D, y est plus grand qu'en A; de même en C, y est plus petit qu'en B; mais en A, y est plus grand qu'*aux points voisins* et en B il est plus petit qu'*aux points voisins*.

III. Soit la fonction :

$$y = \frac{x - 2}{x - 3}.$$

On trouve :

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x - 2}{x + \Delta x - 3} - \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)},$$

et, par suite :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-3)^2}.$$

La dérivée est constamment négative; donc la fonction est *toujours décroissante*. Mais ce serait

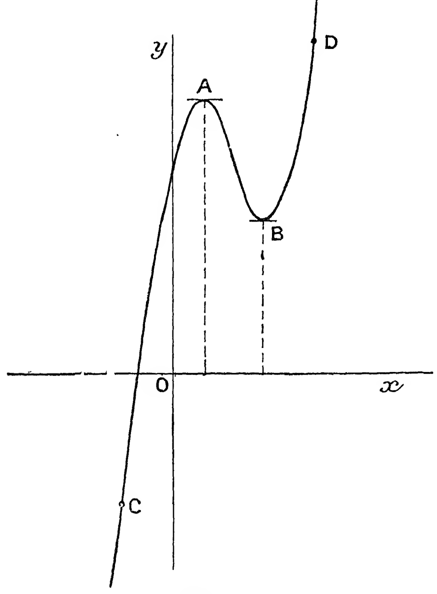


Fig. 59.

une grave erreur d'en conclure que pour $x = 5$, par exemple, la valeur est plus petite que pour $x = 0$:

$$\text{pour } x = 0, \text{ on a } y = \frac{2}{3}$$

$$\text{pour } x = 5, \text{ on a } y = \frac{3}{2}.$$

En effet, entre o et 5 se trouve compris le pôle de la fonction $x = 3$; en ce point la fonction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; il n'y a pas en ce point de dérivée, puisque la fonction elle-même n'est pas définie; on doit donc envisager séparément l'intervalle compris entre o et 3 et l'intervalle compris entre 3 et 5; la fonction est bien décroissante dans chacun de ces intervalles.

Ceci nous montre l'utilité de la remarque suivante.

Remarque essentielle. — *Lorsque l'on étudie les variations d'une fonction à l'aide des dérivées, on doit envisager séparément et successivement des intervalles de valeurs de la variable, tels que dans chacun d'eux la fonction ne devienne pas infinie.*

II. THÉORIE BASÉE SUR LES LIMITES

136. **Limites.** — Étant donnée une fonction y d'une variable x, on dit que y a pour limite b lorsque x tend vers a, lorsque l'on peut prendre x assez voisin de a pour que y diffère de b aussi peu que l'on veut.

D'une manière plus précise, il faut que si l'on se donne un nombre très petit *quelconque*, comme $\frac{1}{1000}$, ou $\frac{1}{100\,000}$, ou $\frac{1}{10\,000\,000}$, on puisse, ce nombre étant donné, fixer un intervalle comprenant a et tel que, lorsque x est compris dans cet intervalle, la valeur absolue de la différence $y - b$ est inférieure au nombre donné. Naturellement, si l'on suppose ce nombre donné de plus en plus petit, l'intervalle pour x deviendra aussi de plus en plus petit; mais cet intervalle devra exister *quel que soit* le nombre donné.

Par exemple, soit :

$$y = x^2 - 2x + 3.$$

Lorsque x tend vers 3, y a pour limite 6; en effet, si nous voulons que la valeur absolue de $y - 6$ soit inférieure à $\frac{1}{10\,000}$, il suffit que :

$$x^2 - 2x - 3,$$

soit inférieur à $\frac{1}{10\,000}$ en valeur absolue ; or, on a :

$$(x^2 - 2x - 3) = (x + 2)(x - 3),$$

Si l'on suppose x compris entre 2 et 4, $x + 1$ est compris entre 3 et 5 et pour que le produit $(x + 1)(x - 3)$ soit inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{50\,000}$, il suffit que $x - 3$ soit inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{10\,000}$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$3 - \frac{1}{50\,000} < x < 3 + \frac{1}{50\,000}.$$

Lorsque x est dans l'intervalle défini par ces inégalités, on est assuré que la valeur absolue de $y - 6$ est inférieure à $\frac{1}{10\,000}$; et nous voyons en même temps que si nous avions choisi un nombre autre que $\frac{1}{10\,000}$, par exemple $\frac{1}{1\,000\,000}$ ou $\frac{1}{100\,000\,000}$, nous aurions trouvé par la même méthode un intervalle pour x.

On peut énoncer la définition précédente sous une forme tout à fait précise en disant :

Définition. — *On dit que y tend vers la limite b lorsque x tend vers a, si étant donné un nombre positif arbitraire ε, il est possible de déterminer un nombre positif h tel que les inégalités :*

$$a - h < x < a + h,$$

aient pour conséquence :

$$b - \varepsilon < y < b + \varepsilon.$$

Par exemple, dans l'exemple précédent, pour $\varepsilon = \frac{1}{10\,000}$

nous avons pu prendre $h = \frac{1}{50\,000}$; et on verrait de mêm que, quel que soit ε (inférieur à 1), il suffit de prendre $h = \frac{\varepsilon}{5}$.

137. **Propriétés élémentaires des limites.** ADDITION. — *Si plusieurs fonctions y, z, t d'une même variable x tendent respectivement vers des limites b, c, d, lorsque x tend vers a, la somme $y + z + t$ tend vers la somme $b + c + d$ des limites.*

En effet, d'après la définition, étant donné un nombre arbitraire ε, on peut déterminer un nombre h, tel que les inégalités :

$$(1) \qquad a - h_1 < x < a + h_1,$$

entraînent :

$$(1)' \qquad b - \varepsilon < y < b + \varepsilon.$$

On peut de même déterminer un nombre h_2 tel que les inégalités :

$$(2) \qquad a - h_2 < x < a + h_2,$$

entraînent :

$$(2)' \qquad c - \varepsilon < z < c + \varepsilon,$$

et un nombre h_3 tel que les inégalités :

$$(3) \qquad a - h_3 < x < a + h,$$

entraînent :

$$(3)' \qquad d - \varepsilon < t < d + \varepsilon.$$

Soit h le plus petit des 3 nombres h_1, h_2, h_3, les inégalités :

$$(4) \qquad a - h < x < a + h,$$

entraîneront les inégalités (1), (2), (3) et par suite les inégalités (1)′, (2)′, (3)′. Ces inégalités étant de même sens on peut les ajouter, ce qui entraîne :

$$(4)' \qquad b + c + d - 3\varepsilon < y + z + t < b + c + d + 3\varepsilon.$$

Pour démontrer que $y + z + t$ a pour limite $b + c + d$ lorsque x tend vers a, il faut montrer qu'étant donné un

nombre positif arbitraire (que nous pouvons appeler 3ε, en appelant ε le tiers de ce nombre), on peut déterminer un nombre h, tel que les inégalités (4) entraînent les inégalités (4)'. Or, pour déterminer le nombre h, il suffit de déterminer h_1, h_2, h_3 de manière que les inégalités (1), (2), (3) entraînent (1)', (2)', (3)', ce qui est possible par hypothèse, quel que soit le nombre ε, et de prendre pour h le plus petit des nombres h_1, h_2, h_3.

Multiplication par une constante. — *Si la fonction y tend vers b lorsque x tend vers a et que A désigne une constante quelconque, la fonction Ay tend vers Ab.*

Nous voulons avoir les inégalités :

$$Ab - \varepsilon < Ay < Ab + \varepsilon. \tag{5}$$

Or, si nous divisons par A, nous aurons :

Si A est positif :

$$b - \frac{\varepsilon}{A} < y < b + \frac{\varepsilon}{A},$$

et si A est négatif :

$$b - \frac{\varepsilon}{A} > y > b + \frac{\varepsilon}{A}.$$

Désignons par ε' le quotient $\frac{\varepsilon}{A}$ si A est positif et le quotient $\frac{-\varepsilon}{A}$ si A est négatif; nous aurons dans tous les cas :

$$b - \varepsilon' < y < b + \varepsilon', \tag{6}$$

ε' étant un nombre positif.

Les inégalités (6) sont équivalentes aux inégalités (5); or quel que soit le nombre positif ε' on peut, par hypothèse, déterminer le nombre positif h tel que les inégalités :

$$a - h < x < a + h \tag{7}$$

entraînent les inégalités (6); donc, quel que soit le nombre positif ε, on pourra déterminer ε', puis h de telle manière que les inégalités (7) entraînent les inégalités (5), C. Q. F. D.

Combinaison linéaire. — En combinant les résultats qui précèdent, on en déduit le théorème suivant qui les comprend comme cas particuliers.

Théorème. — *Soient y, z, t des variables qui tendent respectivement vers les limites b, c, d lorsque x tend vers a et B, C, D des constantes quelconques, la combinaison linéaire :*

$$By + Cz + Dt,$$

tend vers

$$Bb + Cc + Dd,$$

lorsque x tend vers a.

Multiplication. — *Soient y et z des variables qui tendent respectivement vers les limites b et c lorsque x tend vers a : le produit yz tend vers la limite bc.*

Supposons d'abord b et c positifs et choisissoı nombre ε tel que $b - \varepsilon$ et $c - \varepsilon$ soient positifs; on déterminer un nombre h tel que les inégalités :

$$a - h < x < a + h \tag{8}$$

entraînent :

$$\left\{ \begin{array}{l} b - \varepsilon < y < b + \varepsilon \\ c - \varepsilon < z < c + \varepsilon \end{array} \right. \tag{9}$$

Ces dernières inégalités ne renfermant que des nombı positifs entraînent :

$$(b - \varepsilon)(c - \varepsilon) < yz < (b + \varepsilon)(c + \varepsilon),$$

c'est-à-dire :

$$bc - \varepsilon(b + c) + \varepsilon^2 < yz < bc + \varepsilon(b + c) + \varepsilon^2,$$

et, à fortiori :

$$bc - \varepsilon' < yz < bc + \varepsilon', \tag{10}$$

si l'on a :

$$\varepsilon' > (b + c)\varepsilon + \varepsilon^2. \tag{11}$$

Or, b et c étant donnés, on peut déterminer un nombre ε de telle manière que l'on ait :

$$\varepsilon^2 + (b + c)\varepsilon < \varepsilon'.$$

Il suffira en effet de prendre ε inférieur à la racine positive de l'équation :

$$X^2 + (b + c)X - \varepsilon' = 0,$$

car cette équation, ε' étant positif, a deux racines de signes contraires.

Donc, étant donné un nombre arbitraire positif ε', on pourra déterminer un nombre positif ε par l'inégalité (11), déterminer ensuite, ce qui est possible par hypothèse, le nombre positif h tel que les inégalités (8) entraînent les inégalités (9), et il en résultera que les inégalités (8) entraînent les inégalités (10).

Le théorème est donc démontré dans le cas où b et c sont positifs. Soient maintenant b et c quelconques et B et C deux constantes, telles que $B + b$ et $C + c$ soient positifs ; $y + B$ tend vers $b + B$ et $z + C$ vers $c + C$, donc :

$$(y + B)(z + C) = yz + Bz + Cy + BC,$$

tend vers :

$$(b + B)(c + C) = bc + Bc + Cb + BC.$$

Or $Bz + Cy + BC$ tend vers $Bc + Cb + BC$, donc yz tend vers bc.

Généralisation. — En appliquant successivement plusieurs fois les théorèmes précédents, on arrive au théorème général suivant :

Théorème. — *Soient y, z, t un nombre quelconque de variables qui, lorsque x tend vers a, tendent respectivement vers les limites b, c, d; et $P(y, z, t)$ un polynome quelconque en y, z, t à coefficients constants; lorsque x tend vers a, la valeur de $P(y, z, t)$ a pour limite $P(b, c, d)$.*

Division. — Supposons que lorsque x tend vers a, y tende vers la limite b *différente de zéro* [1] ; je dis que $\frac{1}{y}$ *tend vers* $\frac{1}{b}$.

Nous pouvons nous borner au cas où b est positif, car si

1. Il me paraît qu'il n'y aurait que des avantages à dire qu'une variable qui augmente indéfiniment *tend vers la limite* ∞ ; on aurait ainsi des énoncés plus généraux, dans lesquels les valeurs particulières 0 et ∞ ne se distingueraient pas des autres ; mais il m'a semblé qu'il n'y avait pas lieu d'introduire ici cette forme de langage, assez en dehors des habitudes actuelles, je me conforme donc aux définitions classiques.

on change y en $-y$, b est changé en $-b$ et si l'on démontre que $\frac{-1}{y}$ tend vers $\frac{-1}{b}$ il en résulte que $\frac{1}{y}$ tend vers $\frac{1}{b}$.

Supposons donc b positif et désignons par ε un nombre positif tel que $b-\varepsilon$ soit positif, quel que soit ε, on pourra déterminer un nombre positif h tel que les inégalités :

$$(12) \qquad a-h<x<a+h$$

entraînent :

$$(13) \qquad b-\varepsilon<y<b+\varepsilon.$$

Or ces inégalités donnent, puisque $b-\varepsilon$, y, $b+\varepsilon$ sont positifs :

$$\frac{1}{b-\varepsilon}>\frac{1}{y}>\frac{1}{b+\varepsilon},$$

et elles entraînent les suivantes :

$$(14) \qquad \frac{1}{b}-\varepsilon'<\frac{1}{y}<\frac{1}{b}+\varepsilon',$$

si l'on a :

$$\frac{1}{b-\varepsilon}<\frac{1}{b}+\varepsilon'$$

$$\frac{1}{b+\varepsilon}>\frac{1}{b}-\varepsilon'.$$

Or, ces inégalités sont du premier degré en ε et donnent, la première :

$$b-\varepsilon>\frac{1}{\frac{1}{b}+\varepsilon'}$$

$$\varepsilon<b-\frac{b}{1+b\varepsilon'}$$

$$(15) \qquad \varepsilon<\frac{b^2\varepsilon'}{1+b\varepsilon'},$$

et la seconde, en supposant $\varepsilon'<\frac{1}{b}$:

$$b+\varepsilon<\frac{1}{\frac{1}{b}-\varepsilon'}$$

$$\varepsilon < \frac{b}{1 - b\varepsilon'} - b$$

(16) $$\varepsilon < \frac{b^2\varepsilon'}{1 - b\varepsilon'}.$$

L'inégalité (15) entraîne l'inégalité (16); il suffira donc, étant donné le nombre positif ε' quelconque (nous pouvons le supposer inférieur à $\frac{1}{b}$) de choisir un nombre positif ε vérifiant l'inégalité (15) et de déterminer ensuite b de telle manière que les inégalités (12) entraînent les inégalités (13); elles entraîneront aussi les inégalités (14). C. Q. F. D.

Remarque. — On a $\frac{y}{z} = y \times \frac{1}{z}$; donc si y et z tendent vers les limites b et c et que c ne soit pas nul, $\frac{y}{z}$ tend vers $\frac{b}{c}$.

138. **Fonction continue.** — *On dit qu'une fonction y d'une variable x est une fonction continue pour une valeur donnée de x, $x = a$, lorsque cette fonction a une valeur déterminée b pour $x = a$ et pour x voisin de a et que la limite des valeurs qu'elle prend lorsque x tend vers a est précisément sa valeur b pour $x = a$.*

Cet énoncé exprime deux faits principaux : 1° les valeurs, supposées déterminées, de la fonction, *tendent vers une limite* lorsque x tend vers a; 2° cette limite est b.

Il résulte immédiatement de cette définition et du théorème de la p. 326 que *si y, z, t, sont des fonctions continues de x, tout polynome en y, z, t, à coefficients constants, est une fonction continue de x.*

En particulier, x est une fonction continue de x; donc tout polynome en x est une fonction continue de x.

Enfin la remarque qui termine le paragraphe précédent entraîne : *le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue, pourvu que le dénominateur ne soit pas nul pour la valeur considérée de la variable.*

139. **Dérivées.** — On appelle dérivée d'une fonction la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, *si cette limite existe, lorsque Δx tend vers zéro.*

Dérivée d'une somme. — Si plusieurs fonctions y, z, t d'une même variable x admettent des dérivées pour $x = a$, leur somme $y + z + t$ admet une dérivée, laquelle est égale à la somme des dérivées.

On a, en effet :

$$\frac{\Delta(y + z + t)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Par hypothèse, chacun des termes du second membre tend vers une limite lorsque Δx tend vers zéro; leur somme tend donc vers une limite, laquelle est égale à la somme des limites.

Plus généralement, les fonctions y, z, t ayant pour dérivées y', z', t', la fonction :

$$By + Cz + Dt,$$

où B, C, D sont des constantes, admet une dérivée qui est :

$$By' + Cz' + Dt'.$$

Dérivée d'un produit. — Soient y et z deux fonctions admettant les dérivées y' et z'; le produit yz admet une dérivée qui est :

$$yz' + zy',$$

c'est-à-dire qui s'obtient *en ajoutant les produits de chaque facteur par la dérivée de l'autre.*

En effet, on a .

$$\Delta(yz) = (y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz$$
$$= y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \Delta z.$$
$$\frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = y\frac{\Delta z}{\Delta x} + z\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x.$$

Lorsque Δx tend vers zéro $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tend vers z', $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vers y', et Δx vers zéro; ce second membre a donc une limite qui est :

$$yz' + zy' + y'z' \times 0 = yz' + zy'.$$

On a donc :

$$(yz)' = yz' + zy'.$$

C. Q. F. D.

Dérivée d'un quotient. — Conservons les mêmes notations, mais supposons de plus essentiellement $z \neq 0$; le quotient $\frac{y}{z}$ admet une dérivée qui est $\frac{y'z - z'y}{z^2}$.

En effet, on a :

$$\Delta\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z} = \frac{z\Delta y - y\Delta z}{z(z + \Delta z)}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{y}{z}\right)}{\Delta x} = \frac{z\,\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\,\frac{\Delta z}{\Delta x}}{z\,(z + \Delta z)}$$

Comme $z + \Delta z$ tend vers z, qui n'est pas nul, on a :

$$\left(\frac{y'}{z}\right) = \frac{zy' - yz'}{z^2}$$

C. Q. F. D.

Dérivée d'une fonction de fonction. — Soit y une fonction de x, x étant lui-même une fonction de t; si t varie, x varie et par suite y varie; y dépend de t par l'intermédiaire de x; y est dit une *fonction de fonction.*

Théorème. — *Si y admet une dérivée par rapport à x et x une dérivée par rapport à t, y admet par rapport à t une dérivée, qui est égale au produit des deux précédentes.*

En effet, si l'on donne à t un accroissement Δt, x prend un accroissement Δx et y un accroissement Δy; on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Par hypothèse, les deux termes du second membre tendent respectivement vers les limites[1] y'_x et x'_t; donc le premier membre tend vers une limite y'_t, et l'on a :

$$y'_t = y'_x\, x'_t.$$

Ce que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

1. L'indice x indique que l'on prend la dérivée par rapport à x; on énonce : *y' par rapport à x.*

140. **Calcul des dérivées.** — La dérivée de x est évidemment 1 ; la dérivée de x^2 s'obtiendra par la formule :

$$(yz) -$$

en y supposant $y = z = x$; il vie

$$(x^2)' = x.1 + 1...$$

La dérivée de x^3 se déduira de la mên posant :

$$y = x^2 \qquad z = x$$
$$(x^3)' = x^2.1 + 2x.x = 3x^2.$$

Plus généralement, supposons établie la form

$$(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2},$$

et cherchons la dérivée de x^n ; nous ferons :

$$y = x^{n-1} \qquad z = x,$$

et il viendra :

$$(x^n)' = (yz)' = x^{n-1}.1 + (n-1)x^{n-2}.x = n\,x^{n-1}.$$

Donc, la formule se démontre de proche en proche po toute valeur entière de n; on en déduit la règle de dérivation d'un polynome donnée page 315.

Exemple. — Calculer la dérivée de :

$$3x^2 - x^4 + x^5 - 3.$$

Il vient :

$$6x - 4x^3 + 5x^4.$$

141. **Applications.** — Calculer la dérivée de :

$$y = \cos 3x,$$

si l'on pose $3x = t$.

On a :

$$y = \cos t \qquad t = 3x,$$

On trouverait de même les dérivées suivantes :

$$y = \sin ax \qquad y' = a \cos ax$$

$$y = \operatorname{tg} ax \qquad y' = \frac{a}{\cos ax}$$

$$y = \cos^3 x \qquad y' = -3 \cos^2 x \sin x.$$

Pour calculer cette dernière dérivée, on pose $\cos x = t$.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX

171. — Calculer directement les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = 2x - 5$$
$$y = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$
$$y = 8x^4 - 5x^2 + 3.$$

172. — Calculer directement les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \frac{x-3}{x-4}$$

$$y = \frac{2x-3}{3x-4}$$

$$y = \frac{2x-5}{4-3x}.$$

173. — Calculer directement les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$y = \frac{3x-4}{x^2-1}$$

$$y = \frac{3x^2-5}{x^2-1}$$

$$y = \frac{4x^2-5x+3}{x^2-6x+5}.$$

174. — Calculer directement les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = \cos 2x - 3 \sin x$$

$$y = x \sin x.$$

175. — Calculer directement les dérivées des fo suivantes :

$$y = \frac{2 - 3 \cos x}{5 - \sin x}$$

$$y = 4 \cos^2 x - 5 \cos x + 3x$$

$$y = 4 \sin x \cos x - \cos 5x.$$

176. — Étudier les variations des fonctions de l'exercice

177. — Trouver les maxima et minima de l'expressi

$$y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$

178. — On appelle dérivée seconde d'une fonction la dérivée de la dérivée *première* (la dérivée première est celle que nous avons définie) ; on la désigne par y''. Si l'on suppose y, y', y'' positifs tous trois, la fonction est croissante et, de plus, la pente y' de la tangente est croissante, puisque la dérivée y'' de y' est positive. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire relativement à la concavité ou convexité de la courbe ? Appliquer ceci à la parabole et à l'hyperbole.

CHAPITRE X

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.
INTÉRÊTS COMPOSÉS

I. PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

142. **Progressions arithmétiques.** — On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, *forment une progression arithmétique ou sont en progression arithmétique* lorsque la différence de deux nombres consécutifs a toujours la même valeur (et le même signe). Par exemple, les nombres 3, 5, 7, 9 sont en progression arithmétique, car les différences $5 - 3$, $7 - 5$, $9 - 7$ sont toutes égales à 2. De même les nombres 92, 82, 72, 62, 52 sont en progression arithmétique, car les différences $82 - 92$, $72 - 82$, etc., sont toutes égales à -10. On donne à cette différence constante le nom de *raison* de la progression arithmétique; ainsi, dans notre premier exemple, la raison est 2, dans le second, la raison est -10.

Lorsqu'on connaît le premier terme d'une progression arithmétique et la raison, il est facile

d'écrire les autres termes, il suffit d'ajouter successivement la raison à chaque terme pour avoir le terme suivant.

Exemple. — *Former une progression arithmétique composée de 6 termes, dont le premier terme soit 7 et la raison 5.* Les termes successifs sont : $7+5=12$; $12+5=17$; $17+5=22$; $22+5=27$; $27+5=32$, de sorte que la progression demandée est formée des termes suivants : 7, 12, 17, 22, 27, 32.

Autre exemple. — *Former une progression arithmétique composée de 5 termes dont le premier terme soit 13 et la raison —8.* On obtient, en procédant de la même manière, la progression : 13, 5, —3, —11, —19.

Il arrive souvent que l'on n'a pas besoin de connaître les termes intermédiaires de la progression, mais qu'on désire connaître la valeur du terme qui occupe un rang déterminé. On remarque alors que le *second* terme s'obtient en ajoutant au premier la raison; le *troisième* terme s'obtient en ajoutant au second la raison et, par suite, est égal au premier, *plus deux fois la raison;* le *quatrième* terme s'obtient en ajoutant encore la raison au troisième et par suite est égal au premier *plus trois fois la raison;* de même, le *cinquième* terme est égal au premier, *plus quatre fois la raison*, etc. Le *centième* terme serait égal au premier, *plus quatre-vingt-dix-neuf fois la raison.*

Règle. — *Pour obtenir la valeur d'un terme de rang déterminé d'une progression arithmétique, on ajoute au premier terme le produit de la raison par le rang donné, diminué d'une unité.*

Si l'on désigne par a le premier terme, par r la raison, par n le rang donné et par x la valeur du terme qui occupe ce rang, cette règle se traduit par la formule :

$$x = a + (n - 1)r.$$

Dans le cas où la raison est un nombre positif les termes successifs vont en croissant, la progression est *croissante;* elle est *décroissante* dans le cas où la raison est un nombre négatif.

143. **Progressions géométriques**. — On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, *forment une progression géométrique ou sont en progression géométrique*, lorsque le quotient de deux nombres consécutifs a toujours la même valeur. Par exemple les nombres 3, 6, 12, 24 sont en progression géométrique car l'on a : $6 : 3 = 2$; $12 : 6 = 2$; $24 : 12 = 2$. Ce quotient 2 est dit la *raison* de la progression. De même les nombres 3 600, 360, 36, 3,6, 0,36, forment une progression dont la raison est 0,1. Les nombres 2, -3, $\frac{9}{2}$, $\frac{-27}{4}$, forment une progression géométrique dont la raison est $\frac{-2}{3}$.

Lorsqu'on connaît le premier terme et la raison d'une progression géométrique, il est facile de calculer successivement tous les termes; il suffit de multiplier successivement chaque terme par la raison pour avoir le terme suivant.

Exemple. — *Former une progression géométrique de 5 termes dont le premier terme soit 625 et la raison 1,2*. On obtient successivement $625 \times 1,2 = 750$;

$750 \times 1,2 = 900$; $900 \times 1,2 = 1080$; $1080 \times 1,2 = 1296$. La progression cherchée est donc : 625, 750, 900, 1080, 1296. Il arrive souvent que l'on veut connaître la valeur d'un terme de rang déterminé, sans calculer les termes intermédiaires. Dans ce but, on remarque que le *second* terme est égal au *produit du premier par la raison;* le *troisième terme* est égal au produit du second par la raison, c'est-à-dire au produit *du premier terme par le carré de la raison;* le *quatrième* terme est de même égal au produit du premier par le *cube* de la raison, etc. On a donc la règle suivante.

Règle. — *Pour obtenir un terme de rang donné d'une progression géométrique dont on connaît le premier terme et la raison, on multiplie le premier terme par une puissance de la raison dont l'exposant est égal au rang donné diminué d'une*

Si l'on désigne par a le premier te raison, par n le rang donné et par x le te ché, cette règle se traduit par la formule :

$$x = ar^{n-1}.$$

Dans le cas où la raison r est un nombre positif supérieur à 1 les termes vont en croissant et la progression géométrique est dite *croissante;* elle est *décroissante* si r est un nombre positif inférieur à 1 ; dans le cas où r est négatif, les termes de la progression sont alternativement positifs et négatifs; leur *valeur absolue* croît ou décroît suivant que la *valeur absolue* de r est supérieure ou inférieure à 1.

II. LOGARITHMES

144. **Définition des logarithmes.** — Considérons deux progressions croissantes, l'une arithmétique commençant par zéro, l'autre géométrique commençant par 1 ; si l'on désigne par r la raison de la progression arithmétique et par s la raison de la progression géométrique, ces deux progressions s'écriront :

$$0,\ r,\ 2r,\ 3r,\ 4r\ldots,\ nr,\ldots$$
$$1,\ s,\ s^2,\ s^3,\ s^4\ldots,\ s^n,\ldots$$

Nous conviendrons de dire que chaque terme de la progression arithmétique est le *logarithme* du terme de même rang de la progression géométrique; ainsi $3r$ est le logarithme de s^3, on dira aussi que s^3 est l'*antilogarithme* de $3r$; *c'est le nombre dont le logarithme est* $3r$. Il y a plusieurs *systèmes* de logarithmes, car on peut choisir de diverses manières les nombres s et r; nous ne considérerons que le système dit de *logarithmes vulgaires*, qui satisfait à la condition que le logarithme de 10 est égal à 1 ; nous verrons que cette condition entraîne de grandes simplifications dans les calculs. Nous ne démontrerons pas l'*existence* de ce système et nous n'indiquerons pas comment on peut calculer les logarithmes des divers nombres dans ce système. Observons seulement que, si l'on prend pour r un nombre très petit et pour s un nombre très voisin de 1, les termes consécutifs des deux progressions diffèrent très peu, de telle manière que tout nombre peut, avec une approximation

suffisante, être considéré comme compris dans ces deux progressions. Pour avoir des logarithmes vulgaires, on prend :

$$r = 0{,}0001$$
$$s = 1{,}000230311 5\ldots$$

et les progressions que l'on construit ainsi :

$$0,\ r,\ 2r, \ldots\ldots$$
$$1,\ s,\ s^2, \ldots\ldots,$$

sont telles que le 10 000e terme de la progression arithmétique est 1, tandis que le 10 000e terme de la progression géométrique est 10.

On a construit des tables dans lesquelles sont inscrits les logarithmes et les antilogarithmes de tous les nombres, avec un certain nombre de décimales; nous allons en expliquer la disposition et l'usage en prenant comme type la table à 4 décimales qui se trouve à la fin de ce chapitre.

145. **Disposition des tables à 4 décimales.** — La première de nos tables (*Logarithmes à 4 décimales*, p. 366) fait connaître les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 et 10, de centième en centième, c'est-à-dire des nombres 1,00; 1,01, 1,02; .... ; 9,99. Nous savons que ces logarithmes sont des nombres compris entre 0 et 1 ; la table nous donnera leur partie décimale.

Soit, par exemple, à trouver dans la table le logarithme de 1,30 ; nous rechercherons, dans la colonne N, le nombre **13** formé des deux premiers chiffres du nombre donné; et, dans la ligne qui commence par **13**, nous lirons le nombre contenu dans la colonne marquée **0**; nous trouvons 1139; c'est la partie

décimale cherchée ; on a donc :

$$\log 1,30 = 0,1139.$$

Pour avoir le logarithme de 1,31 nous nous reporterons, dans la même ligne qui commence par **13**, à la colonne marquée **1**; nous ne trouvons que trois chiffres 173, car on a sous-entendu le premier chiffre 1, qui est le même que pour la colonne précédente, de sorte qu'il faut lire 1173, et que l'on a :

$$\log 1,31 = 0,1173.$$

En continuant dans la même ligne, nous aurions :

$$\log 1,32 = 0,1206$$
$$\log 1,33 = 0,1239,$$

et ainsi de suite.

Soit à rechercher le logarithme de 1,59; dans la ligne **15** et la colonne **9** nous lisons *014; le signe * signifie que le premier chiffre n'est pas 1 comme pour les logarithmes précédents de la même ligne, mais 2 qui se trouve au commencement de la ligne suivante ; on a :

$$\log 1,58 = 0,1987$$
$$\log 1,59 = 0,2014$$
$$\log 1,60 = 0,2041.$$

On remarquera que les lignes et les colonnes de la table sont groupées 5 par 5 ; cette disposition a pour but d'éviter les erreurs de lecture, car on arrive rapidement à se rendre compte de la place d'une ligne ou d'une colonne par rapport aux lignes et aux colonnes voisines, et on évite ainsi les

erreurs qui se produiraient si l'on ne suivait pas correctement la ligne ou la colonne, et que l'on confonde avec la ligne ou colonne voisines. Par exemple, on remarque que les lignes correspondant aux nombres : 10, 15, 20... suivent immédiatement un blanc; les lignes 11, 16, 21..., ne sont séparées du blanc que par une ligne; les lignes 14, 19, 24... précèdent un blanc, et les lignes 13, 18, 23... n'en sont séparées que par une ligne; enfin les lignes 12, 17, 22... occupent le milieu d'un groupe de 5 lignes sans blanc; il en est de même pour les colonnes, sauf que le blanc est remplacé par un double trait. A l'aide de ces remarques, un peu d'habitude suffit pour trouver un logarithme d'un seul coup d'œil.

La disposition des tables d'antilogarithmes est tout à fait analogue. Ces tables font connaître les antilogarithmes des nombres compris entre 0 et 1, de millième en millième, c'est-à-dire des nombres 0,001 ; 0,002 ; ......; 0,999. Soit à rechercher l'antilogarithme de 0,324; on se reportera, dans la colonne marquée L, au nombre **32**; et dans la ligne qui commence par **32**, à la colonne **4**; on y lit les trois chiffres 109 à la gauche desquels on inscrit le chiffre 2 qui se trouve dans la première colonne, en face de **31**; l'antilogarithme cherché est donc 2,109. De même, on trouverait que l'antilogarithme de 0,325 est 2,113. L'usage du signe * est le même dans cette table que dans la précédente; il indique que le premier chiffre par lequel on doit compléter l'antilogarithme cherché doit être pris en tête de la ligne suivante, et non des lignes précédentes. Par exemple, l'antilogarithme de 0,848 est 7,047.

146. Disposition des tables à 5 décimales. — Comme type de tables à 5 décimales, nous décrirons les tables de Hoüel (Gauthier-Villars, Paris), en nous bornant à la partie de ces tables qui contient les logarithmes à 5 décimales, et en laissant de côté diverses dispositions accessoires destinées à faciliter certains calculs trigonométriques.

La partie de ces tables qui nous intéresse ici s'étend de la page [5] à la page [35]; nous en donnons un spécimen ci-contre; dans les colonnes marquées N se trouvent les nombres compris entre 1000 et 9999; pour avoir le logarithme de 1,089, par exemple, on cherchera dans cette colonne le nombre 1089 et l'on verra à côté dans la colonne Log les chiffres 03703, c'est la partie décimale du logarithme cherché; l'on a :

$$\log 1,089 = 0,03703.$$

Supposons que l'on veuille connaître le logarithme de 1,0893; ce logarithme n'est pas dans la table; il est compris entre celui de 1,089 et 1,090; la différence entre ces deux logarithmes est inscrite dans la colonne marquée D; elle est 40. On admet dans les calculs que le logarithme variant de 40 lorsque le nombre s'accroît de 10 dix-millièmes, il varie des $\frac{3}{10}$ de 40 lorsque le nombre s'accroît de 3 dix-millièmes. Pour éviter au calculateur d'avoir à rechercher la valeur des $\frac{3}{10}$ de 40, cette valeur est inscrite dans une colonne spéciale, marquée P. Pr. (*parties proportionnelles*), vis-à-vis du chiffre 3 dans

[5]

N. 9 — 12 L. 95 — 07

0°17′	4,68557 ; 58		0°18′	4,68557 ; 58		0°19′	4,68557 ; 58		P. pr.	
N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D		
1020	00860	43	1080	03342	41	1140	05690	39	41	
1021	00903	42	1081	03383	40	1141	05729	38	1	4
1022	00945	43	1082	03423	40	1142	05767	38	2	8
1023	00988	42	1083	03463	40	1143	05805	38	3	12
1024	01030	42	1084	03503	40	1144	05843	38	4	16
1025	01072	43	1085	03543	40	1145	05881	37	5	21
1026	01115	42	1086	03583	40	1146	05918	38	6	25
1027	01157	42	1087	03623	40	1147	05956	38	7	29
1028	01199	43	1088	03663	40	1148	05994	38	8	33
1029	01242	42	1089	03703	40	1149	06032	38	9	37
1030	01284	42	1090	03743	39	1150	06070	38	40	
1031	01326	42	1091	03782	40	1151	06108	37	1	4
1032	01368	42	1092	03822	40	1152	06145	38	2	8
1033	01450	42	1093	03862	40	1153	06183	38	3	12
1034	01452	42	1094	03902	39	1154	06221	37	4	16
1035	01494	42	1095	03941	40	1155	06258	38	5	20
1036	01536	42	1096	03981	40	1156	06296	37	6	24
1037	01578	42	1097	04021	39	1157	06333	38	7	28
1038	01620	42	1098	04060	40	1158	06371	37	8	32
1039	01662	42	1099	04100	39	1159	06408	38	9	36

le tableau en tête duquel est inscrit **40**. On disposera de la manière suivante le calcul du logarithme de 1,0893 :

$$\begin{array}{lr} \log 1{,}089 = & 0{,}03703 \\ \text{pour} \quad 3 & 12 \\ \hline \log 1{,}0893 = & 0{,}03715 \end{array}$$

On utilise de même les parties proportionnelles

pour trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné Soit, par exemple, à trouver le nombre dont le log. est 0,03356; la table montre que ce nombre est compris entre 1,080 et 1,081, la différence tabulaire est 41 ; on disposera ainsi le calcul :

0,03356	
pour 0,03342	1,080
14	
pour 12	3
pour 20	5
	1,08035

On retranchera du logarithme donné le logarithme immédiatement inférieur trouvé dans la table, la différence est 14; on trouve dans les parties proportionnelles de 41 que 12, qui correspond à 3, est le nombre immédiatement inférieur à 14; la différence est 2; on y ajoute un 0 et la table de parties proportionnelles donne 5 pour 21, nombre le plus voisin de 20; le nombre cherché est 1,08035.

147. **Propriété fondamentale des logarithmes.** — La propriété fondamentale des logarithmes est la suivante : *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

En effet, si nous nous reportons aux progressions par lesquelles nous avons défini les logarithmes, nous voyons que les nombres s^m et s^n ont pour logarithmes mr et nr; leur produit est s^{m+n} et a pour logarithme $(m+n)r$, ce qui justifie bien notre énoncé.

Cette propriété fondamentale permet de simplifier bien des calculs; elle est l'origine des applications

des logarithmes et la raison de leur utilité pratique. Soit, en effet, à effectuer le produit de plusieurs nombres; à calculer, par exemple, le nombre x donné par la formule :

$$x = 1,33 \times 2,15 \times 2,31 \times 1,48.$$

D'après la propriété fondamentale, nous aurons :

$$\log x = \log 1,33 + \log 2,15 + \log 2,31 + \log 1,48.$$

Mais la table nous donne ces logarithmes et il suffit de les ajouter pour avoir $\log x$.

$$\begin{aligned} \log 1,33 &= 0,1239 \\ \log 2,15 &= 0,3324 \\ \log 2,31 &= 0,3636 \\ \log 1,48 &= 0,1703 \\ \hline \log x &= 0,9902 \end{aligned}$$

Connaissant $\log x$ nous rechercherons dans table d'antilogarithmes l'antilogarithme de 0,99 c'est 9,772; tel est le produit cherché. En réalité, le dernier chiffre décimal trouvé n'est pas exact; cela tient à ce que les valeurs écrites pour les logarithmes ne sont jamais exactes, puisqu'on n'a que 4 décimales; mais, dans la pratique, il est souvent très suffisant d'avoir trois chiffres exacts; par exemple, si x désigne un nombre inconnu de francs, on prendra $x = 9^{fr}77$ (et même, le plus souvent, $9^{fr}75$).

Autre exemple. — *Calculer le nombre y donné par la formule :*

$$y = 1,36 \times 1,37 \times 1,38 \times 1,39 \times 1,40 \times 1,41.$$

Nous trouvons dans la table des logarithmes des nombres donnés; en les ajoutant, on a log y.

$$\begin{array}{l}
\log 1{,}36 = 0{,}1335 \\
\log 1{,}37 = 0{,}1367 \\
\log 1{,}38 = 0{,}1399 \\
\log 1{,}39 = 0{,}1430 \\
\log 1{,}40 = 0{,}1461 \\
\log 1{,}41 = 0{,}1492 \\
\hline
\log y \quad = 0{,}8484
\end{array}$$

Pour avoir y il suffit de chercher l'antilogarithme le 0,8484; on trouve dans la table que l'antilogaithme de 0,848 est 7,047 et que l'antilogarithme le 0,849 est 7,063; l'antilogarithme de 0,8484 est ompris entre les deux[1]; nous pouvons prendre ',05, pour n'écrire que des chiffres exacts

148. **Division.** — *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

En effet, la formule :

$$a = bc,$$

entraîne :

$$\log a = \log b + \log c,$$

donc la formule :

$$b = \frac{a}{c}$$

entraîne :

$$\log b = \log a - \log c.$$

1. On pourrait aussi employer les parties proportionnelles, comme nous l'avons expliqué pour les tables à 5 décimales.

EXEMPLE. — *Calculer le nombre x donné par la formule :*

$$x = \frac{8,34}{1,23}.$$

On a :

$$\begin{array}{rl} \log 8,34 & = 0,9212 \\ \log 1,23 & = 0,0899 \\ \hline \log x & = 0,8313 \\ x & = 6,78. \end{array}$$

Nous verrons plus loin que l'on procède souvent d'une manière plus simple, en utilisant les cologarithmes.

149. **Puissances et racines.** — L'emploi des logarithmes est particulièrement commode lorsque l'on veut calculer une puissance ou extraire une racine. Soit, en effet :

$$a = b^4.$$

Le nombre a est égal au produit de 4 nombres égaux à b :

$$a = b \times b \times b \times b.$$

On a donc :

$$\log a = \log b + \log b + \log b + \log b,$$

c'est-à-dire :

$$\log a = 4 \log b,$$

et, inversement :

$$\log b = \frac{1}{4} \log a.$$

Ainsi *la formule :*

$$a = b^4$$

ou la formule équivalente :

$$b = \sqrt[4]{a}$$

entraînent :

$$\log a = 4 \log b$$

$$\log b = \frac{1}{4} \log a.$$

Exemple I. — *Soit à calculer la 5e puissance de* 1,23. Si on pose :

$$x = (1,23)^5$$

on aura :

$$\log x = 5 \log 1,23 = 5 \times 0,0899 = 0,4495.$$

Il faut rechercher l'antilogarithme de 0,4495, l'antilogarithme de 0,449 est 2,812 et l'antilogarithme de 0,450 est 2,818; x est donc très voisin de 2,815

Exemple II. — *Calculer* $\sqrt[4]{3,14}$. Désignons cette racine par y. On a :

$$\log y = \frac{1}{4} \log 3,14 = \frac{1}{4} \times 0,4969 = 0,1242.$$

La table d'antilogarithmes donne 1,33 pour antilogarithme de 0,124; c'est une valeur très approchée de y.

150. **Logarithmes des nombres non compris entre 1 et 10** — La table nous fait connaître, comme nous l'avons dit, les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10; pour obtenir les logarithmes des autres nombres, on utilise la propriété fondamentale :

$$\log a = \log b + \log c.$$

Nous ne nous attarderons pas à démontrer que l'ensemble des logarithmes ainsi définis possède bien toujours cette propriété fondamentale, ni que cette définition est équivalente à celle que l'on pourrait déduire des progressions déjà considérées.

Soit, par exemple, à trouver le logarithme de 134; on remarquera que l'on a :

$$134 = 1,34 \times 10 \times 10.$$

On en conclut :

$$\log 134 = \log 1,34 + 2 \log 10.$$

Or la table donne :

$$\log 1,34 = 0,1271$$

et l'on sait que l'on a :

$$\log 10 = 1.$$

Il en résulte :

$$\log 134 = 0,1271 + 2 = 2,1271.$$

On voit que la partie décimale est la même pour log 134 que pour log 1,34; comme c'est cette partie décimale que fournit la table, on en conclut que, pour rechercher le logarithme d'un nombre dans la table, *il n'y a pas à s'inquiéter de la virgule.* La partie entière du logarithme est ici 2; on voit qu'elle est égale au nombre de décimales qu'il faut séparer pour avoir un nombre compris entre 1 et 10; on peut dire aussi qu'elle est égale au nombre des chiffres non décimaux, *diminué d'une unité.* On donne à cette partie entière le nom de *caractéristique.*

Exemples. — *Trouver le logarithme* de 120 000; la table donne la partie décimale 0792; la caractéristique est 5; le logarithme cherché est donc 5,0792.

Trouver le logarithme de 34,5; la table donne la partie décimale 5378; la caractéristique est 1; le logarithme est donc 1,5378.

Trouver l'antilogarithme de 2,343, c'est à-dire le nombre dont le logarithme est 2,343. On cherchera dans la table le nombre dont le logarithme est 0,343 et on le multipliera par 100, puisque la caractéristique est 2; on trouve ainsi 220,3.

Trouver l'antilogarithme de 3. On n'a pas besoin de la table pour savoir que l'antilogarithme de 0 est 1, l'antilogarithme de 3 est 1000.

Applications. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = 34,2 \times 46,3 \times 2,35 \times 15,4.$$

Nous aurons :

$$\begin{array}{l} \log 34,2 \ = 1,5328 \\ \log 46,3 \ = 1,6656 \\ \log \ \ 2,35 = 0,3711 \\ \log 15,4 \ = 1,1875 \\ \hline \qquad \log x = 4,7570 \end{array}$$

On cherchera l'antilogarithme de 0,757, qui est 5,715, et on reculera la virgule de 4 rangs vers la droite, puisque la caractéristique de $\log x$ est 4; on obtient ainsi $x = 57150$; mais, bien entendu, on ne peut pas compter sur l'exactitude des deux derniers chiffres. Pour avoir un plus grand nombre de

chiffres exacts, il faudrait employer des table: plus grand nombre de décimales; mais ce souvent pas nécessaire.

151. **Nombres inférieurs à 1. Caractéristiques négatives.** — Soit à rechercher le logarithme de 0,00341; nous pouvons écrire :

$$0{,}00341 = \frac{3{,}41}{1000}.$$

Donc :

$$\log 0{,}00341 = \log 3{,}41 - \log 1000$$
$$= 0{,}5328 \quad - 3.$$

Le logarithme cherché est donc égal à 0,5328 — 3, c'est-à-dire à — 2,4672; c'est un nombre négatif; il en est ainsi pour tous les logarithmes de tous les nombres inférieurs à un.

En pratique, *on n'effectue jamais la soustraction;* au lieu d'écrire :

$$0{,}5328 - 3,$$

on convient d'écrire :

$$\bar{3}{,}5328,$$

en plaçant un trait au-dessus du chiffre 3; par définition, c'est la même chose que — 3 + 0,5328, c'est-à-dire que — 2,4672. Le chiffre $\bar{3}$ est une *caractéristique négative.*

Pour ajouter deux ou plusieurs logarithmes, on ajoute les parties décimales; si leur somme a une partie entière, on la retient, et on l'ajoute aux caractéristiques en tenant compte de leurs signes.

Exemple I. — *Calculer le produit :*

$$x = 23{,}5 \times 0{,}824.$$

On a :

$$\begin{array}{rl} \log 23{,}5 & = 1{,}3711 \\ \log \ 0{,}824 & = \bar{1}{,}9159 \\ \hline \log x & = 1{,}2870 \end{array}$$

Pour faire l'addition, on procède d'abord comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ordinaires; quand on arrive à la colonne des unités, on a 1 de retenue, 1, et $\bar{1}$, c'est-à-dire $1 + 1 - 1 = 1$.

On trouve ainsi :

$$x = 19{,}36.$$

Exemple II. — *Calculer le produit :*

$$x = 234 \times 0{,}0325 \times 22{,}3 \times 0{,}98 \times 80.$$

On a :

$$\begin{array}{rl} \log 234 & = 2{,}3692 \\ \log \ 0{,}325 & = \bar{2}{,}5119 \\ \log \ 22{,}3 & = 1{,}3483 \\ \log \ 0{,}98 & = \bar{1}{,}9912 \\ \log \ 80 & = 1{,}9031 \\ \hline \log x & = 4{,}1237 \end{array}$$

On a 3 de retenue dans la colonne des unités, qui s'ajoutent aux caractéristiques 2, $\bar{2}$, 1, $\bar{1}$, 1, ce qui donne $3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1 = 4$. On trouve ainsi $x = 13\,290$ environ.

Exemple III. — *Calculer* $\sqrt[4]{0{,}0325}$.

On a $\log 0{,}0325 = \bar{2}{,}2099$. Il faut en prendre le quart; pour cela, on remarque que l'on a :

$$\bar{2}{,}2099 = -2 + 0{,}2099 = -4 + 2{,}2099.$$

On prendra le quart de -4 qui est -1 et ensuite

le quart de 2,2099, ce qui donne 0,5524 ; on obtient ainsi $\bar{1}$,5524, dont l'antilogarithme est 0,3556.

152. **Emploi des cologarithmes.** — De même que l'on n'écrit pas de logarithmes négatifs, on évite d'avoir à retrancher un logarithme; on remarque que retrancher un nombre équivaut à ajouter le nombre opposé; le nombre opposé à un logarithme s'appelle le cologarithme Le cologarithme s'écrit à vue d'œil, sous la condition que la somme du logarithme et du cologarithme soit égale à 0.

EXEMPLE. — *Le logarithme d'un nombre est* 1,3032 ; *quel est son cologarithme?* On voit que c'est $\bar{2}$,6968, car si l'on fait l'addition :

$$\begin{array}{r} 1{,}3032 \\ \bar{2}{,}6968 \\ \hline 0{,}0000 \end{array},$$

on obtient $8 + 2 = 10$; je pose 0 et retiens
6 font 9, plus un de retenue font 10 ; je pose zero
retiens 1, etc.

On voit que le succès tient à ce que la somme des deux chiffres de droite est 10, la somme des chiffres décimaux écrits au-dessous l'un de l'autre étant 9 et la somme des caractéristiques étant — 1. D'où la règle :

RÈGLE. — *Etant donné un logarithme, pour écrire le cologarithme, on détermine la caractéristique par la condition que la somme des deux caractéristiques soit — 1, et les autres chiffres, par la condition que la somme des chiffres correspondants soit égale à 9, sauf pour les derniers, dont la somme doit être 10.*

153. Résumé des règles pour l'usage des tables. Partie décimale. — La partie décimale d'un logarithme se trouve dans la table à 4 ou à 5 décimales; on la complète, s'il y a lieu, par le calcul des parties proportionnelles, la partie décimale d'un cologarithme s'écrit à vue, d'après la partie décimale lue dans la table pour le logarithme, si l'on lit 1324, on écrit 8676, en disant mentalement :

$$1+8=9;\quad 3+6=9;\quad 2+7=9;\quad 4+6=10.$$

Dans le cas où il y a des parties proportionnelles à calculer, on fait ce calcul avant d'écrire le cologarithme.

Caractéristique. — La caractéristique d'un logarithme est égale au nombre de rangs dont il faut déplacer la virgule pour obtenir un nombre compris entre 1 et 10; elle est positive si le nombre donné était supérieur à 10 et négative s'il était inférieur à 1. La caractéristique du cologarithme s'obtient en retranchant de — 1 la caractéristique du logarithme; on peut dire aussi que, si le nombre est plus grand que 1, elle est négative, et a pour valeur absolue le nombre de chiffres de la partie entière; si le nombre est inférieur à 1 elle est nulle ou positive, et égale au nombre de zéros qui suivent la virgule.

Antilogarithmes. — On recherche les antilogarithmes dans la table en ne tenant compte que de la partie décimale, la caractéristique indique ensuite de combien de rangs il faut déplacer la virgule, vers la droite si elle est positive, vers la gauche si elle est négative.

154. Disposition des calculs. — Lorsqu'on a à

calculer une formule par logarithmes, on co
par disposer le calcul avant de cherche
nombre dans la table; on écrit en même temp
caractéristiques, que l'on connaît sans avoir à
chercher dans la table.

Exemple I. — Soit à calculer la valeur x par la formule :

$$x = \frac{3,45 \times 3,34 \times 35,2}{894 \times 0,034}.$$

Le log de x s'obtient en ajoutant les logarithmes des facteurs qui sont au numérateur et retranchant les logarithmes de ceux qui sont au dénominateur; il revient au même d'additionner leurs cologarithmes. On disposera donc le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{lll}
\log & 3,45 & = 0, \\
\log & 3,34 & = 0, \\
\log & 35,2 & = 1, \\
\text{colog} & 894 & = \overline{3}, \\
\text{colog} & 0,034 & = 1, \\
\hline
& \log x & = \\
& x & =
\end{array}$$

Le calcul étant ainsi disposé, on recherchera dans la table les parties décimales; on aura ainsi :

$$\begin{array}{lll}
\log & 3,45 & = 0,5378 \\
\log & 3,34 & = 0,5237 \\
\log & 35,2 & = 1,5465 \\
\text{colog} & 894 & = \overline{3},0487 \\
\text{colog} & 0,034 & = 1,4685 \\
\hline
& \log x & = 1,1252
\end{array}$$

d'où :

$$x = 13,34.$$

On a écrit à vue les colog.

Dans le cas où il y a des calculs auxiliaires à effectuer, on a soin de les disposer aussi d'avance.

Exemple II. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = \frac{(34,2)^2 \times \sqrt[3]{3,5}}{\sqrt[4]{3,45 \times 872}}$$

On disposera le calcul comme il suit.

CALCULS AUXILIAIRES.

$$\log 34,2 = 1, \qquad \log 3,5 = 0,$$

$$2 \log 34,2 = \qquad \frac{1}{3} \log 3,5 =$$

$$\log 3,45 = 0,$$

$$\log 872 = 2,$$

$$\log 3,45 \times 872 =$$

$$\frac{1}{4} \log 3,45 \times 872 =$$

$$\text{colog} \sqrt[4]{3,45 \times 872} =$$

CALCUL DÉFINITIF.

$$2 \log 34,2 =$$

$$\frac{1}{3} \log 3,5 =$$

$$\text{colog} \sqrt[4]{3,45 \times 872} =$$

$$\log x =$$

$$x =$$

Une fois ce tableau fait, mais alors seulement, on consultera la table pour rechercher les parties décimales laissées en blanc.

Remarque. — Bien des erreurs sont souvent occasionnées par la transcription des résultats intermédiaires ; ainsi, dans le tableau précédent, tous les logarithmes du calcul définitif sont transcrits ; il est bon de s'habituer, autant que posssible, à éviter cette transcription ; pour cela, on adoptera, par exemple, la disposition suivante :

CALCULS AUXILIAIRES.	CALCUL DÉFINITIF.
$\log\ 34,2 = 1,$	$2 \log 34,2 =$
$\log\ 3,5 = 0,$	$\frac{1}{3} \log\ 3,5 =$
$\log\ 3,45 = 0,$	$\text{colog} \sqrt[4]{3,45 \times 872} =$
$\log 872 = 2,$	$\log x =$
$\log\ 3,45 \times 872 =$	$x =$
$\frac{1}{4} \log\ 3,45 \times 872 =$	

III. INTÉRÊTS COMPOSÉS

L'une des questions pratiques dans lesquelles l'usage des logarithmes est le plus utile est le calcul des intérêts composés ; c'est pourquoi l'on a l'habitude de les étudier après les logarithmes, bien que ce soient là des théories bien dissemblables et qu'il n'est guère logique d'associer.

155. **Intérêts composés.** — On dit qu'une somme d'argent est placée à intérêts composés lorsque les intérêts produits par cette somme au bout d'une certaine période ne sont pas payés au

créancier, mais s'ajoutent au capital pour porter eux-mêmes intérêts La période au bout de laquelle les intérêts sont ainsi *capitalisés* est généralement de 6 mois ou d'un an; nous ne nous occuperons que du cas où elle est d'un an. Ainsi, Pierre prête à Paul 10 000fr à intérêts composés, au taux de 5 o/o l'an, cela signifie qu'au bout d'un an, Paul ne payera pas à Pierre les 500fr d'intérêt annuel que doivent rapporter les 10 000 au taux de 5 o/o, mais que sa dette se trouvera être de 10 500fr, lesquels rapporteront dès lors 5 o/o d'intérêt, c'est-à-dire 525fr en un an, au bout de la seconde année, la dette de Paul sera donc 10 500 + 525, c'est-à-dire 11 025fr, lesquels rapporteront intérêt à 5 o/o, soit 551fr,25 en un an. Au bout de la troisième année, la dette de Paul sera donc : 11 025 + 551,25 = 11 576fr,25, et ainsi de suite.

Au premier abord, il peut sembler fort naturel que l'intérêt non payé vienne ainsi augmenter la dette et rapporte lui-même intérêt; il ne semble pas qu'il y ait là un problème essentiellement différent de celui des intérêts simples, mais seulement un cas particulier. Mais ce cas particulier est d'une très grande importance dans beaucoup de questions pratiques; de plus, la progression très rapide des intérêts accumulés pendant un grand nombre d'années conduit à des conséquences véritablement effrayantes, qui ont nécessité une réglementation spéciale des prêts à intérêts composés (lois sur la prescription quinquennale des arrérages; surveillance de l'Etat sur les sociétés d'assurance et de retraites, sur le Crédit foncier, etc.). Nous verrons en effet que la possibilité de placements à intérêts

composés sans aucune réglementation entraîn
des conséquences tout à fait inadmissibles.

156. **Formule des intérêts composés.** — Soit A une somme, placée au taux de a o/o l'an; c'est-à-dire que 100fr rapportent a francs; la somme A rapporte par suite $\frac{Aa}{100}$; et l'intérêt, ajouté au capital, donne au bout d'un an une dette totale de :

$$A+\frac{Aa}{100}=A\left(1+\frac{a}{100}\right).$$

Ainsi, on a la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir la valeur totale d'une somme A augmentée de ses intérêts, au bout d'un an, on multiplie cette somme par le binome* $1+\frac{a}{100}$, *a étant le taux.*

Nous pouvons appliquer cette même règle à la somme $A\left(1+\frac{a}{100}\right)$ qui se trouve placée pendant une nouvelle année; nous trouvons ainsi qu'au bout de deux ans, la dette totale est devenue :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{a}{100}\right)=A\left(1+\frac{a}{100}\right)^2.$$

On pourra appliquer encore la même règle, et l'on obtiendra, pour la valeur de la dette au bout de la 3e année :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^2\left(1+\frac{a}{100}\right)=A\left(1+\frac{a}{100}\right)^3.$$

Au bout de n années, la dette deviendrait :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$$

d'où la règle :

Règle. — *Pour avoir la valeur totale, capital et intérêts, d'une somme A placée à intérêts composés pendant n années, on multiplie cette somme A par la n^e puissance du binome $1+\frac{a}{100}$, a étant le taux annuel pour 100.*

157. **Applications.** — Problème I. *Une somme de 10 000fr est placée à intérêts composés pendant 20 ans, au taux de 4 0/0. Quelle est la somme totale due au bout de ces 20 ans ?*

On a ici :

$$A = 10\,000, \qquad a = 4, \qquad 1+\frac{a}{100} = 1{,}04;$$

on obtient donc :

$$10\,000 \times (1{,}04)^{20}.$$

Calculons cette expression par logarithmes.

On a :

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}04 &= 0{,}0170 \\ 20 \log\ 1{,}04 &= 0{,}34 \\ \log\ 10\,000 &= 4 \\ \hline & \quad 4{,}34 \end{aligned}$$

Il faut rechercher l'antilogarithme de 4,34 ; on trouve 21 880 ; le résultat cherché est donc 21 880fr ; la somme de 10 000fr est plus que doublée.

Remarque. — On voit que l'on est amené à multiplier par 20 le logarithme de 1,04 ; l'erreur commise sur ce logarithme par le fait que l'on néglige les décimales qui suivent la 4e se trouve ainsi nota-

blement augmentée; aussi est-il utile, pour les problèmes d'intérêts composés, d'avoir les valeurs très exactes des logarithmes du binome $1 + \frac{a}{100}$ pour les valeurs du taux a qui sont les plus usitées. Nous les donnons ci-dessous avec 10 décimales :

a	$1 + \frac{a}{100}$	$\log\left(1 + \frac{a}{100}\right)$
2	1,02	0,0086001718
2 1/4	1,0225	0,0096633167
2 1/2	1,0250	0,0107238654
2 3/4	1,0275	0,0117818305
3	1,03	0,0128372247
3 1/4	1,0325	0,0138900603
3 1/2	1,035	0,0149403498
3 3/4	1,0375	0,0159881054
4	1,04	0,0170333393

Bien entendu, on ne prendra que le nombre de décimales nécessaires pour avoir 4 ou 5 décimales exactes après la multiplication; en général, 6 ou 7 décimales suffiront, à moins que le temps ne soit très long

PROBLÈME II. — *Quelle somme faut-il placer à intérêts composés, à 3 0/0, pour toucher 1000fr dans 50 ans?*

En désignant par x la somme cherchée, on a :

$$x\,(1,03)^{50} = 1000$$

$$\log x = 3 - 50 \log 1,03.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}03 &= 0{,}012837 \\ 50 \log\ 1{,}03 &= 0{,}64185 \\ \text{colog}\,(1{,}03)^{50} &= \bar{1}{,}35815 \\ &\quad 3 \\ \hline \log x &= 2{,}35815 \end{aligned}$$

On trouve dans la table que 0,358 a pour antilogarithme 2,280. On a donc $x = 228^{\text{fr}}$ environ.

Problème III. — *Les héritiers d'un fournisseur de la cour de Louis XIV réclament une somme de 234fr qui leur serait due depuis le 15 février 1675 avec les intérêts composés à 4 0/0 depuis cette date. Quelle somme aurait dû leur payer le gouvernement français le 15 février 1903, si leur réclamation avait été admise?*

La durée de la dette est 1903 — 1675 = 228 ans; la somme due serait donc :

$$x = 234\,(1{,}04)^{228}.$$

Or, on a :

$$\begin{array}{r} \log 1{,}04 = 0{,}0170333 \\ 228 \\ \hline 1362664 \\ 340666 \\ 340666 \\ \hline 228 \log 1{,}04 = 3{,}8835924 \\ \log\ 234 = 2{,}3692 \\ \hline \log x = 6{,}25279 \end{array}$$

L'antilogarithme de 0,25279 est environ 1,789; la somme due s'élèverait donc à 1 789 000fr environ.

Problème IV. — *Quelle est la somme produite*

par 1^fr placé à intérêts composés pendant 10
à 2 0/0 l'an?

Cette somme est :

$$x = (1,02)^{1000}.$$

On a donc :

$$\log x = 1\,000, \log 1,02 = 8,600\,17.$$

On en conclut $x = 398\,100\,000$, c'est-à-dire près de 400 millions de francs.

Problème V. — *Dans un tombeau égyptien, remontant à 4000 ans, on découvre une pièce de bronze d'une valeur de 0^fr,05 ; quelle somme aurait rapportée cette pièce aux héritiers de son propriétaire, si elle avait été placée à intérêts composés au taux de 3 1/2 0/0 ?*

La somme x cherchée est donnée par la formule :

$$x = 0,05 \times (1,035)^{4000}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \log 1,035 &= 0,0149403498 \\ 4000 \log 1,035 &= 59,7613992 \\ \log 0,05 &= \bar{2},6990 \\ \hline \log x &= 58,4603992 \end{aligned}$$

L'antilogarithme de 0,46 est 2,884 ; il faut déplacer la virgule de 58 rangs vers la droite, ce qui donne un nombre de *millions de milliards de francs* qui s'écrit :

28 840 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

179. — Trouver le 4[e] terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2 et la raison 5.

180. — Trouver le 8[e] terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 5 et la raison 2.

181. — On raconte que l'inventeur du jeu des échecs demanda comme récompense : 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 grains pour la seconde, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours, jusqu'à la 64[e] case. Combien de grains de blé aurait-il fallu lui donner pour cette 64[e] case?

182. — Quels sont les logarithmes des nombres suivants :

32,5	0,30923
3240	82,4254
60000	0,0082345
3,02	0,0034597
0,304	72320 0000

183. — Quels sont les cologarithmes des nombres précédents ?

184. — Quel est le cologarithme de 100?

185. — Former les produits par 2 et les quotients par 2 des logarithmes suivants :

2,3425	1,85648
$\bar{2}$,3425	$\bar{2}$,85648
3,3425	$\bar{3}$,85643
3,3425	2,85648

186. — Quels sont les antilogarithmes des nombres suivants :

$\bar{3}$,342	2,42523
$\bar{4}$,324	$\bar{2}$,43834
0,435	$\bar{9}$,57556
15,234	8,93782

187. — Calculer par logarithmes les expressions suivantes :

$$x = \frac{(0{,}035)^4 \sqrt{875000}}{342 \times 3{,}46 \times \sqrt[3]{2{,}34}}$$

$$y = \frac{\sqrt{35}\,\sqrt[3]{42}\,\sqrt[5]{26400}}{(1{,}34)^6\,(3{,}42)^7}$$

188. — Quelle est la valeur totale d'une somme de 500^{fr} placée à intérêts composés pendant 8 ans au taux de 3 o/o?

189. — Quelle somme doit-on placer à intérêts composés au taux de 4 o/o pour obtenir 1 000 000^{fr} au bout de 75 ans?

190. — Pendant combien d'années doivent rester placés 1000^{fr} à intérêts composés, au taux de 4 o/o pour que la valeur totale, capital et intérêts, devienne égale à 1540^{fr}?

191. — Pendant combien d'années doit rester placé un capital de 2000^{fr} au taux de 3 o/o pour que la somme du capital et des intérêts accumulés atteigne 5000^{fr}?

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	1761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	3979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	5441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	6532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	8129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	8751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	9294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	9542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	9777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

Table d'antilogarithmes à quatre décimales.

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	002	005	007	009	012	014	016	019	021
01	023	026	028	030	033	035	038	040	042	045
02	047	050	052	054	057	059	062	064	067	069
03	072	074	076	079	081	084	086	089	091	094
04	096	099	102	104	107	109	112	114	117	119
05	1122	125	127	130	132	135	138	140	143	146
06	148	151	153	156	159	161	164	167	169	172
07	175	178	180	183	186	189	191	194	197	199
08	202	205	208	211	213	216	219	222	225	227
09	230	233	236	239	242	245	247	250	253	256
10	1259	262	265	268	271	274	276	279	282	285
11	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315
12	318	321	324	327	330	334	337	340	343	346
13	349	352	355	358	361	365	368	371	374	377
14	380	384	387	390	393	396	400	403	406	409
15	1413	416	419	422	426	429	432	435	439	442
16	445	449	452	455	459	462	466	469	472	476
17	479	483	486	489	493	496	500	503	507	510
18	514	517	521	524	528	531	535	538	542	545
19	549	552	556	560	563	567	570	574	578	581

ANTILOGARITHMES A QUATRE DÉCIMALES

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
20	1585	589	592	596	600	603	609	611	614	618
21	622	626	629	633	637	641	644	648	652	656
22	660	663	667	671	675	679	683	687	690	694
23	698	702	706	710	714	718	722	726	730	734
24	738	742	746	750	754	758	762	766	770	774
25	1778	782	786	791	795	799	803	807	811	816
26	820	824	828	832	837	841	845	849	854	858
27	862	866	871	875	879	884	888	892	897	901
28	905	910	914	919	923	928	932	936	941	945
29	950	954	959	963	968	972	977	982	986	991
30	1995	*000	*004	*009	*014	*018	*023	*028	*032	*037
31	2042	046	051	056	061	065	070	075	080	084
32	089	094	099	104	109	113	118	123	128	133
33	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183
34	188	193	198	203	208	213	218	223	228	234
35	2239	244	249	254	259	265	270	275	280	286
36	291	296	301	307	312	317	323	328	333	339
37	344	350	355	360	366	371	377	382	388	393
38	399	404	410	415	421	427	432	438	443	449
39	455	460	466	472	477	483	489	495	500	506
40	2512	518	523	529	535	541	547	553	559	564
41	570	576	582	588	594	600	606	612	618	624
42	630	636	642	649	655	661	667	673	679	685
43	692	698	704	710	716	723	729	735	742	748
44	754	761	767	773	780	786	793	799	805	812
45	2818	825	831	838	844	851	858	864	871	877
46	884	891	897	904	911	917	924	931	938	944
47	951	958	965	972	979	985	992	999	*006	*013
48	3020	027	034	041	048	055	062	069	076	083
49	090	097	105	112	119	126	133	141	148	155
50	3162	170	177	184	192	199	206	214	221	228
51	236	243	251	258	266	273	281	289	296	304
52	311	319	327	334	342	350	357	365	373	381
53	388	396	404	412	420	428	436	443	451	459
54	467	475	483	491	499	508	516	524	532	540
55	3548	556	565	573	581	589	597	606	614	622
56	631	639	648	656	664	673	681	690	698	707
57	715	724	733	741	750	758	767	776	784	793
58	802	811	819	828	837	846	855	864	873	882
59	890	899	908	917	926	936	945	954	963	972

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	3981	990	999	*009	*018	*027	*036	*046	*055	*064
61	4074	083	093	102	111	121	130	140	150	159
62	169	178	188	198	207	217	227	236	246	256
63	266	276	285	295	305	315	325	335	345	355
64	365	375	385	395	406	416	426	436	446	457
65	4467	477	487	498	508	519	529	539	550	560
66	571	581	592	603	613	624	634	645	656	667
67	677	688	699	710	721	732	742	753	764	775
68	786	797	808	819	831	842	853	864	875	887
69	898	909	920	932	943	955	966	977	989	*000
70	5012	023	035	047	058	070	082	093	105	117
71	129	140	152	164	176	188	200	212	224	236
72	248	260	272	284	297	309	321	333	346	358
73	370	383	395	408	420	433	445	458	470	483
74	495	508	521	534	546	559	572	585	598	610
75	5623	636	649	662	675	689	702	715	728	741
76	754	768	781	794	808	821	834	848	861	875
77	888	902	916	929	943	957	970	984	998	*012
78	6026	039	053	067	081	095	109	124	138	152
79	166	180	194	209	223	237	252	266	281	295
80	6310	324	339	353	368	383	397	412	427	442
81	457	471	486	501	516	531	546	561	577	592
82	607	622	637	653	668	683	699	714	730	745
83	761	776	792	808	823	839	855	871	887	902
84	918	934	950	966	982	998	*015	*031	*047	*063
85	7079	096	112	129	145	161	178	194	211	228
86	244	261	278	295	311	328	345	362	379	396
87	413	430	447	464	482	499	516	534	551	568
88	586	603	621	638	656	674	691	709	727	745
89	762	780	798	816	834	852	870	889	907	925
90	943	962	980	998	*017	*035	*054	*072	*091	*110
91	8128	147	166	185	204	222	241	260	279	299
92	318	337	356	375	395	414	433	453	472	492
93	511	531	551	570	590	610	630	650	670	690
94	710	730	750	770	790	810	831	851	872	892
95	8913	933	954	974	995	*016	*036	*057	*078	*099
96	9120	141	162	183	204	226	247	268	290	311
97	333	354	376	397	419	441	462	484	506	528
98	550	572	594	616	638	661	683	705	727	750
99	772	795	817	840	863	886	908	931	954	977

EXERCICES DE RÉCAPITULATION

192. — Résoudre et discuter le système

$$\frac{y-3x-4}{x+2y-3}=\frac{4y-4x}{3x+5y-2}=t$$

dans lequel x et y désignent les inconnues et t un nombre donné, positif ou négatif.

193. — Trois événements futurs A, B, C sont tels que l'un d'eux seul se produira à l'exclusion des deux autres (par exemple, de trois coureurs, un seul arrivera premier; de trois candidats, un seul sera élu, etc.). Pierre tient une agence de paris dans les conditions suivantes; si un parieur lui verse x francs en pariant pour A, il lui remboursera ax francs si l'événement A se produit et ne lui remboursera rien si l'événement A ne se produit pas; a est dit la cote de A; on désignera de même par b et c les cotes de B et de C. Ceci posé quelles sommes x, y, z doit-on parier respectivement sur les événements A, B, C, pour gagner sûrement m francs, *quel que soit l'événement qui se produit.* Quelle condition doivent vérifier a, b, c pour que ces sommes soient toutes trois positives. Dans le cas où ces sommes sont négatives, ce qui sera toujours le cas si Pierre n'est pas trop maladroit, on peut seulement résoudre le problème suivant : s'arranger de manière à *perdre*, quoiqu'il arrive, une même somme m.

194. — Calculer les côtés d'un triangle connaissant les médianes α, β, γ. Dans quel cas le triangle trouvé est-il rectangle?

195. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

Discuter.

196. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}$$

Discuter. On pourra ramener ce problème au précédent.

197. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b^3 \end{cases}$$

Discuter. On pourra ramener ce problème au n° 195 en exprimant $x^3 + y^3$ au moyen de $x + y$ et de xy. La même remarque s'applique aux deux exercices suivants.

198. — Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b^4 \end{cases}$$

199. — Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^5 + y^5 = b^5 \end{cases}$$

200. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

201. — On donne la hauteur h, le volume $\frac{\pi h a^2}{3}$ et l'un des rayons de base r d'un tronc de cône; calculer l'autre rayon de base.

202. — On donne un triangle ABC; déterminer sur BC un point O tel que le parallélogramme admettant pour côtés les droites AB, AC et les parallèles à ces droites menées par le point O ait un périmètre donné $2l$.

203. — On donne un triangle ABC rectangle en A; déterminer sur BC un point O tel que le rectangle ayant pour côtés les droites AB, AC et les parallèles à ces droites menées par O, ait une aire donnée m^2.

204. — Étant donné un triangle ABC, on appellera rectangle inscrit dans ce triangle un rectangle MNPQ tel que M soit sur AC, N sur AB, P et Q sur BC; on demande de déterminer un tel rectangle connaissant son périmètre $2a$ et son aire b^2.

205. — Étant donné un triangle ABC on demande de déterminer un triangle *rectangle* tel que les différences entre ses côtés pris deux à deux soient les mêmes que pour le triangle donné. Discuter.

206. — Dans un triangle ABC on donne le côté $BC = a$, l'angle A et la hauteur h issue du sommet A; calculer les côtés $AC = b$ et $AB = c$; discuter.

207. — Dans un triangle, on donne le côté a, le rayon R

du cercle circonscrit et la médiane m correspondant au côté a; calculer les côtés b et c. Discuter.

208. — Dans un triangle, on donne le côté a, la somme $b+c$ des deux autres côtés et l'angle A opposé au côté a; calculer les côtés b et c. Discuter.

209. — Soit ABC un triangle, AH la hauteur, AS la bissectrice, AM la médiane, issues de A (H, S, M sont situés sur BC); résoudre le triangle connaissant les longueurs $AH = h$, $AS = s$, $AM = m$. Discuter.

210. — Couper un trièdre trirectangle par un plan de façon que le triangle obtenu soit égal à un triangle donné.

211. — Étant donné une sphère du centre O et un petit cercle (C) de cette sphère on désigne par (Σ) la plus petite des deux portions en lesquelles le plan de (C) partage la sphère et par (Γ) le cône qui a pour sommet O et pour base (C). On donne le rayon R de la sphère et on demande de déterminer la distance x du plan de (C) au centre de la sphère de manière que l'aire de la calotte (Σ) soit égale à m fois l'aire latérale du cône (Γ). Discuter.

212. — Les notations étant les mêmes que dans l'exercice précédent, déterminer x de manière que le volume de la calotte (Σ) soit égal à p fois le volume du cône (Γ). Discuter.

213. — Dans un triangle on donne un côté a, la différence $b-c$ des deux autres côtés et le rayon du cercle circonscrit; calculer les angles B et C. Discuter.

214. — Dans un triangle on donne la surface S, le périmètre $2p$ et l'un des angles A; calculer les deux autres angles B et C. Discuter.

215. — On considère l'équation du second degré en x :

$$x^2 - 6x + 5 + z(x^2 - 5x + 6) = 0. \tag{1}$$

Quelles sont les valeurs de z pour lesquelles les racines de cette équation sont égales? On désignera ces valeurs par z_1 et z_2; par x_1 la valeur commune des racines de (1) pour $z = z_1$, et par x_2 leur valeur commune pour $z = z_2$. Soient maintenant x' et x'' les racines de (1) pour une valeur quelconque z, distincte de z_1 et de z_2; on demande de calculer la valeur de l'expression : $\frac{(x'-x_1)(x''-x_2)}{(x'-x_2)(x''-x_1)}$, et de vérifier que cette valeur ne dépend pas de z.

TABLE DES MATIÈRES

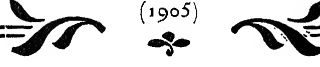
1477-03. — Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 4-04.



COURS DE MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX NOUVEAUX PROGRAMMES

(1905)



ALGÈBRE

SECOND CYCLE

PAR

EMILE BOREL

Professeur adjoint à la Sorbonne et à l'École Normale supérieure.

FASCICULE COMPLÉMENTAIRE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION

comprenant un ajouté au Chapitre X

et 100 Exercices nouveaux

Paris

LIBRAIRIE ARMAND COLIN

5, Rue de Mézières

1906

Ce Fascicule *n'est pas mis dans le commerce.*

PRÉFACE

DE LA TROISIÈME ÉDITION

Les modifications apportées en 1905 aux programmes de 1902 sont, en Algèbre, peu importantes. La plus considérable, en apparence, est la nouvelle rédaction du programme de Première ; ce programme étant en même temps un programme d'examen, il a paru nécessaire de le rendre précis au lieu de se borner aux mots vagues de *revision* et *applications*. Mais, en réalité, il n'y aura presque rien de changé, car les applications spécifiées dans le programme étaient en général données en exercices par les professeurs : la plupart d'entre elles figuraient déjà dans les premières éditions de ce livre.

Cependant, pour tenir compte du fait que l'Algèbre prend plus d'importance en Première, j'ai ajouté une centaine de nouveaux exercices ; je les ai placés à la fin, de manière à n'avoir pas à modifier le numérotage des anciens; mais ils sont classés par chapitres et la plupart d'entre eux peuvent être traités en même temps que ceux qui se trouvent à la fin des chapitres. Il y en a cependant quelques-uns, que l'on reconnaîtra aisément et qui constituent plutôt des compléments au cours. On m'avait demandé d'introduire dans le texte certains de ces compléments; je ne l'ai pas fait, voulant ne pas contribuer à enfler le programme. Car il me paraît certain que l'enflure des programmes, sous l'influence combinée de certains examinateurs et de certains préparateurs d'examens, est une plaie de notre enseignement. Cette plaie est d'autant plus grave que les professeurs sérieux ne *peuvent* pas toujours résister aux pressions diverses qui s'exercent sur eux pour qu'ils imitent les préparateurs d'examens.

J'ai cependant introduit un paragraphe nouveau, 143 bis, parce qu'on me l'a demandé de plusieurs côtés, en m'assurant que l'opinion générale est que la sommation des termes des progressions arithmétiques et géométriques figure au programme. Il me semble qu'il suffit de lire les programmes d'Algèbre de 1902 et de 1905 pour s'assurer qu'elle n'y figure pas; j'ai cependant cédé devant une opinion qui m'a paru presque unanime.

Je tiens à remercier, en terminant, tous les professeurs de l'enseignement secondaire qui ont fait bon accueil à ce livre, et en particulier ceux qui ont bien voulu me signaler des erreurs à corriger et des améliorations à effectuer. J'espère qu'ils voudront bien me continuer leur concours.

Je dois des remerciements particuliers à M. Alexandre Thybaut et à M. Louis Vauthier, dont les conseils basés sur leur expérience personnelle de l'enseignement secondaire m'ont été précieux.

Paris, le 15 octobre 1905.

ALGÈBRE

SECOND CYCLE

CHAPITRE X

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES. INTÉRÊTS COMPOSÉS

I. PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

142. **Progressions arithmétiques.** . . . . .
. . . .

143. **Progressions géométriques.** . . . . .
. . . .

143 *bis*. **Somme des termes d'une progression arithmétique ou géométrique.** — Il est utile, dans bien des questions, de savoir calculer la somme des

termes d'une progression arithmétique ou d'une progression géométrique; nous allons établir les formules générales qui font connaître ces sommes; la méthode par laquelle on établit ces formules peut d'ailleurs être utilisée dans bien d'autres questions.

Soit d'abord une progression arithmétique dont le premier terme est a et la raison r; si l'on désigne par n le nombre des termes, nous avons vu que le dernier terme l est donné par la formule

$$l = a + (n - 1)r.$$

La somme des termes peut donc s'écrire :

$$S = a + [a + r] + [a + 2r] + \ldots + [a + (n - 2)r] + [a + (n - 1)r],$$

ce qui donne, en réduisant les termes semblables,

$$S = na + [1 + 2 + \ldots + (n - 2) + (n - 1)]r.$$

Le coefficient de r est *la somme des* $n - 1$ *premiers nombres entiers;* on est ramené à calculer cette somme. On peut remarquer que les nombres entiers successifs constituent une progression arithmétique particulière; c'est à la sommation de cette progression arithmétique particulière que l'on a ramené la sommation d'une progression arithmétique quelconque.

Nous allons donc nous proposer de calculer la somme des n premiers nombres entiers, c'est-à-dire la somme :

$$S' = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n.$$

Nous remarquerons que l'on peut écrire aussi :

$$S' = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1,$$

et, par suite, en ajoutant les deux égalités précédentes et réunissant les termes qui occupent le même rang dans les deux seconds membres, on obtient :

$$2S' = (1+n)+[2+(n-1)]+\ldots+[(n-1)+2]+[n+1],$$

c'est-à-dire :

$$2S' = (n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1),$$

le nombre des parenthèses du second membre étant n; on a donc :

$$2S' = n(n+1),$$

et, par suite :

$$S' = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Telle est la somme des n premiers nombres entiers.

Il est maintenant aisé de calculer la somme S, où figurait la somme des $n-1$ premiers nombres entiers, comme coefficient de r; on trouve ainsi :

$$(1) \qquad S = na + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

On aurait pu aussi calculer directement S en employant une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour S'; en écrivant :

$$S = a+b+\ldots+k+l$$
$$S = l+k+\ldots+b+a,$$

on obtient :

$$2S = (a+l)+(b+k)+\ldots+(k+b)+(l+a),$$

et comme toutes les parenthèses sont égales [1], il en résulte :

$$2S = n(a + l)$$

$$(2) \qquad S = \frac{n}{2}(a + l),$$

formule parfois plus commode que la formule (1).

Les nombres impairs forment une progression arithmétique de raison 2 ; calculons la somme des n premiers nombres impairs :

$$S'' = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1).$$

Nous aurons $a = 1$, $r = 2$ et, par suite :

$$S'' = n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2.$$

C'est là un résultat très remarquable par sa simplicité. On peut l'établir directement à l'aide d'une figure très simple (fig. 60).

Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy sur lesquels sont portés des longueurs égales :

Fig. 60.

1. Cette égalité est évidente car chaque parenthèse est la somme de deux termes et, lorsqu'on passe de l'une d'elles à la suivante, l'un des termes augmente de r et l'autre diminue de r; la somme reste constante : on a, par exemple : $b = a + r$, $k = l - r$.

OA = AD = DG = GL = CP = OC = CF = FK = KN = NR.

Traçons en traits forts les carrés OABC, ODEF, OGHK, OLMN, OPQR et en pointillés les lignes qui divisent ces carrés en carrés égaux ; il est clair que l'un des grands carrés, par exemple OPQR renferme un nombre de petits carrés égal au carré de son rang ; à $5^2 = 25$ pour l'exemple choisi ; d'autre part, pour évaluer ce nombre de petits carrés, nous pouvons remarquer que nous avons le carré OABC, c'est-à-dire 1 carré, puis les petits carrés compris dans la figure ABCFEDA, au nombre de 3 (ils sont numérotés 1, 2, 3) ; puis les 5 petits carrés compris entre DEF et GHK (numérotés 1, 2, 3, 4, 5), etc., c'est-à-dire un nombre total de petits carrés égal à :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9,$$

c'est-à-dire à la somme des 5 premiers nombres impairs.

On voit ainsi que *la somme des n premiers nombres impairs est égale à* n^2, résultat utile à retenir.

Somme des carrés des n premiers nombres entiers. — Comme application, proposons-nous d'évaluer la somme des carrés des n premiers nombres entiers. Nous la désignerons par S_2, appelant pour la symétrie, S_1 la somme des n premiers nombres entiers. On s'appuie sur l'identité

$$(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

dans laquelle on donne successivement à x, les valeurs 1,

2,...., n; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3.3^2 + 3.3 + 1 \\
5^3 - 4^3 &= 3.4^2 + 3.4 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

et, en ajoutant, il vient :

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n.$$

En remplaçant S_1 par sa valeur $\frac{n(n+1)}{2}$ et chassant le dénominateur, il vient :

$$\begin{aligned}
6S_2 &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n^2 - 3n - 2n \\
&= 2n^3 + 3n^2 + n \\
&= n\,(n+1)\,(2n+1)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$S_2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Telle est la formule demandée. Une méthode analogue donnerait la somme des cubes.

On donnera aux Exercices (p. 391) d'autres applications de la somme des termes d'une progression arithmétique.

Occupons-nous maintenant d'une progression géométrique, dont nous désignerons le premier terme par a et la raison par q; si la progression a n termes, le dernier terme l est donné par la formule :

$$l = aq^{n-1}.$$

Nous nous proposons d'évaluer la somme :

$$S = a + aq + \ldots + aq^{n-1},$$

nous avons :

$$Sq = aq + aq^2 + \ldots + aq^n,$$

et, par suite, en retranchant les deux égalités précédentes :

$$S(1 - q) = a - aq^n,$$

c'est-à-dire :

$$S = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dans le cas où q est plus grand que 1, on écrira, de préférence :

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

mais il est clair que c'est la même chose.

On peut aussi écrire :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

l étant le dernier terme de la progression en remarquant que l'on a :

$$l = aq^{n-1}.$$

Dans le cas où la raison q est supérieure à l'unité, la somme S devient évidemment de plus en plus grande à mesure que n devient plus grand et finit par dépasser tout nombre donné d'avance ; au contraire, lorsque q est inférieur à 1, la somme S grandit bien toujours (si a et q sont positifs), mais ne dépasse pas $\frac{a}{1-q}$; elle diffère d'ailleurs d'autant moins de $\frac{a}{1-q}$ que n est plus grand. Comme exemple de progression géométrique décroissante, on peut citer les fractions décimales périodiques (voir Exercice 313).

— IX —

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

CHAPITRE I

216. — Démontrer que la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre négatif est un nombre positif ou négatif suivant que n est pair ou impair. Calculer les valeurs de l'expression

$$3 + (-1)^n 4 + (-1)^{3n} 5 + (-1)^{5n+1} 7$$

en supposant successivement n pair et impair

217. — Calculer la valeur de y donnée par la formule

$$y = 5x^4 - 4x^2 + 3$$

en supposant $x = -2$.

218. — Calculer la valeur de z donnée par la formule

$$z = 3x^2y^2 - 4x^2y + \frac{1}{10}xy^2 - xy + y^4$$

en supposant $x = -0{,}1$; $y = 10$.

219. — Trouver la relation qui existe entre les abscisses de quatre points A,B,C,D, d'une droite formant une division harmonique, c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

220. — Que devient la relation précédente lorsque l'on suppose que l'origine des abscisses coïncide avec le milieu de AB? lorsque cette origine coïncide avec le point A ?

221. — Démontrer que α,β,γ étant les distances aux côtés d'un triangle équilatéral d'un point M intérieur à ce triangle, on a

$$\alpha + \beta + \gamma = h,$$

h désignant la hauteur du triangle. Quelles conventions de signe faut-il faire pour que cette relation subsiste quelle que soit la position du point M dans le plan du triangle?

CHAPITRE II

222. — Diviser le polynome :

$$15a^4b^8x^2 + 8a^5b^8x^4 + 12a^9b^3x^7$$

par le monome $6a^4b^3x^2$

223. — Diviser le polynome

$$8a^2x^5y^8 + 4a^4x^4y^7 + 32a^5x^3y^9$$

par le monome $16a^2x^3y^7$.

224. — Étant donné le polynome

$$9a^3b^5x^8y^7z^5 + 3a^4x^5y^2z^9 + 45a^8y^7z^4$$

quelles sont les plus grandes valeurs que l'on peut donner aux exposants m,n,p,q,r pour que ce polynome soit divisible par le monome

$$27a^mb^nx^py^qz^r$$

Quel est alors le quotient ?

225. — Vérifier les identités :

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1})$$
$$x^{2m} - a^{2m} = (x + a)(x^{2m-1} - ax^{2m-2} + a^2x^{2m-3} - \ldots - a^{2m-1})$$
$$x^{2m+1} + a^{2m+1} = (x + a)(x^{2m} - ax^{2m-1} + \ldots + a^{2m}).$$

226. — Vérifier l'identité

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (a - b)(b - c)(c - a) = 0.$$

227. — Vérifier l'identité

$$4[(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')]$$
$$= (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c').$$

CHAPITRE III

228. — Résoudre l'équation

$$\frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{2}{x - 1} + 1.$$

229. — Résoudre les équations

$$\frac{x-a}{2bc}+\frac{x-b}{2ca}+\frac{x-c}{2ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$\frac{a-b}{x-1}+\frac{b-c}{x-2}+\frac{c-a}{x-3}=0$$
$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=\frac{3x}{a+b+c}$$
$$\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}.$$

230. — Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z=m \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0. \end{cases}$$

231. — Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z-u=15 \\ x+y-z+u=23 \\ x-y+z+u=35 \\ -x+y+z+u=2. \end{cases}$$

On pourra prendre comme inconnue auxiliaire la somme $x+y+z+u=S$.

232. — Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=12 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=14. \end{cases}$$

On prendra comme inconnues auxiliaires $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

233. — Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1}+\frac{2}{y-3}=15 \\ \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y-3}=8. \end{cases}$$

On prendra comme inconnues auxiliaires $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{y-3}$.

234. — Résoudre le système

$$\frac{1}{2x+3y-5}+\frac{7}{5x-8y+12}=1$$
$$\frac{4}{2x+3y-5}-\frac{14}{5x-8y+12}=1.$$

On prendra pour inconnues auxiliaires $\frac{1}{2x+3y-5}$ et $\frac{1}{5x-8y+12}$; une fois ces inconnues auxiliaires calculées, on sera ramené à un autre système du premier degré pour calculer x et y.

235. — Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 15 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{5}{x+y} = 17. \end{cases}$$

236. — Résoudre le système

$$xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz) = c(xy - yz - zx).$$

237. — Résoudre le système

$$\begin{cases} zu + uy + yz = yzu \\ ux + xz + zu = zux \\ xy + yu + ux = uxy \\ yz + zx + xy = xyz. \end{cases}$$

238. — Démontrer que l'on peut élever au carré les deux membres d'une inégalité dans le cas où ils sont *positifs tous les deux.*

Montrer par des exemples que cette opération n'est pas toujours légitime lorsque les deux membres ne sont pas de même signe. Que se passe-t-il lorsqu'ils sont négatifs tous deux?

239. — Lorsqu'une inégalité renferme un dénominateur dont on ne connaît pas le signe on peut, pour la résoudre, multiplier par *le carré* du dénominateur qui est toujours positif. Appliquer cette remarque à la résolution des inégalités suivantes

$$\frac{3x-5}{x-1} > \frac{3x-8}{x-1}$$

$$\frac{(a^2+b^2)x}{a-b} + (a+b)x > \frac{ab\,x}{b-a} + (3a-b)x.$$

CHAPITRE IV

240. — On considère un cercle de centre O; soit AB un diamètre de ce cercle; on trace deux cercles ayant respecti-

vement pour diamètres AO et BO ; calculer le rayon d'un cercle tangent à ces trois cercles.

241. — On donne deux cercles égaux ; calculer le rayon d'un cercle tangent à ces deux cercles et à la droite qui joint leurs centres.

242. — On donne un cercle et une tangente à ce cercle. Déterminer sur le cercle deux points A et B tels que, en désignant par AA′, BB′ les perpendiculaires abaissées de ces points sur la tangente donnée, le quadrilatère ABA′B′ soit un carré.

243. — Un vaisseau fait en dix heures 110 milles en suivant le courant et 70 milles en le remontant. — Lors d'un autre voyage il fait dans le même temps 88 milles en suivant le courant et 84 milles en le remontant. — Combien de milles ce vaisseau peut-il faire à l'heure dans une eau calme et quelle est la vitesse du courant ?

244. — Un marchand a deux tonneaux renfermant des quantités inégales de vin. Il verse du premier tonneau dans le second une quantité de vin égale à celle que contenait le second tonneau ; puis il verse du second tonneau dans le premier une quantité de vin égale à celle qu'il avait laissée dans le premier tonneau ; enfin il verse du premier tonneau dans le second une quantité de vin égale à celle qu'il avait laissée dans le second tonneau. Chaque tonneau se trouve alors contenir 80 litres. Combien contenaient-ils au début l'un et l'autre ?

245. — Deux corps se meuvent le long d'une circonférence, dans le même sens, à partir de deux points différents. La plus petite distance qui les sépare, mesurée le long de la circonférence, est de 16 mètres ; l'un des corps rattrapera l'autre en 32 secondes s'ils se meuvent dans un sens ou en 40 secondes s'ils se meuvent dans le sens opposé. Tandis que l'un fait une fois le tour de la circonférence, la distance parcourue par l'autre excède de $4^{m},50$ la longueur de la circonférence. Quelle est cette longueur et avec quelle vitesse se meuvent les corps ?

246. — Un éleveur a une qualité de fourrage suffisante pour nourrir ses vaches durant un laps de temps. S'il vendait 75 vaches, son fourrage durerait 20 jours de plus. S'il en achetait 100 au contraire, il durerait 15 jours de moins.

Combien a-t-il de vaches et pour combien de jours a-t-il du fourrage ?

247. — Un alliage de plomb et d'étain pèse 20 kilogrammes; lorsqu'on le plonge dans l'eau, il perd 2 kilogrammes de son poids. Trouver le poids du plomb et de l'étain contenus dans l'alliage sachant que 5 kilogrammes d'étain perdent 685 grammes de leur poids si on les plonge dans l'eau et que $2^{kg},5$ de plomb perdent 223 grammes.

248. — On emploie un certain nombre d'hommes durant 6 heures pour transporter un tas de pierres d'un endroit à un autre. S'il y avait eu deux hommes de plus et si chaque homme avait porté 4 kilogrammes de plus à chaque voyage il y aurait eu une heure de travail en moins. S'il y avait eu trois hommes de moins et si chaque homme avait porté 5 kilogrammes en moins à chaque voyage il y aurait eu 2 heures de travail en plus. Combien y avait-il d'hommes et combien de kilogrammes chaque homme transportait-il par voyage ?

249. — La capacité totale de trois tonneaux est de 1 440 litres. Deux de ces tonneaux sont pleins et le troisième est vide. Pour remplir le tonneau vide il faut tout le contenu du premier tonneau et 1/5 du contenu du second, ou tout le contenu du second et 1/3 du contenu du premier. Quelle est la capacité de chacun des tonneaux ?

250. — Trois frères désirent acheter une maison valant 70 000 francs. Aucun d'eux n'a assez d'argent; si l'aîné donnait au second un tiers de ce qu'il possède ou au troisième un quart de ce qu'il possède, chacun des deux derniers aurait une somme suffisante pour acheter la maison. Mais l'aîné emprunte au troisième la moitié de sa fortune et achète la maison. Combien possédait chaque frère ?

251. — Quatre hommes ont un travail à faire, A et B le feraient en 10 jours. A et C en 12 jours, A et D en 10 jours et B, C et D en 7 jours 1/2. Combien de temps mettrait chacun de ces hommes séparément et en combien de temps le feront-ils tous réunis ?

252. — Résoudre le système

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{tg} x + (2\lambda - 1) \sin y &= 4 \\ (2\lambda + 3) \operatorname{tg} x + (4\lambda - 5) \sin y &= 8. \end{aligned}$$

— XVI —

Discuter. Quelle valeur faut-il donner à λ pour que $\sin y$ soit égal à $\frac{1}{2}$? soit égal à -1 ? Quelles sont alors les valeurs de x ?

253. — On considère une ligne brisée plane dont les angles sont tous droits : $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$. Les côtés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 sont donc tous parallèles à un même axe ox; on désignera par l_1, l_2, l_3, l_4 leurs longueurs, comptées avec un signe; on suppose de plus, que A_4B_4 est sur la même droite que A_1B_1. Ceci posé, on suppose que les côtés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 sont des barres métalliques dont les coefficients de dilatation linéaire sont respectivement λ, λ_2, λ_3, λ_4. Déterminer les longueurs que l'on doit donner à ces barres pour que :

1° la distance A_1B_4 soit égale à 3 mètres à toute température ;

2° A_1B_1 et A_3B_3 soient égaux et de même sens;

3° A_2B_2 et A_4B_4 soient égaux et opposés.

Discuter.

254. — La figure étant la même que dans l'exercice précédent, on suppose que les 4 métaux considérés sont tels que la longueur d'une barre de longueur l à zéro est donnée, à la température t, par les formules suivantes :

$$l_t = l(1 + a_1t + b_1t^2 + c_1t^3)$$
$$l_t = l(1 + a_2t + b_2t^2 + c_2t^3)$$
$$l_t = l(1 + a_3t + b_3t^2 + c_3t^3)$$
$$l_t = l(1 + a_4t + b_4t^2 + c_4t^3)$$

pour les quatre métaux respectivement. Déterminer les longueurs des barres par la condition que A_1B_4 soit égal à L pour toute valeur de t. Discuter.

CHAPITRE V

255. — La pente d'une route étant supposée régulière, déterminer l'altitude du point situé à 15 kilomètres de l'origine de la route, sachant que les points situés à 5 kilomètres et à 40 kilomètres de l'origine ont pour altitudes respectives 142 mètres et 732 mètres.

256. — Trouver l'équation de la droite qui passe par le point $x=2$, $y=3$ et par le point $x=7$, $y=-4$. On fera

la figure en prenant le centimètre pour unité et on vérifiera que l'abscisse du point d'intersection avec Ox a bien sur la figure la valeur que l'on déduira de l'équation.

257. — Trouver l'équation de la droite qui passe par le point $x = -2$, $y = -5$ et par le point $x = 4$, $y = 1$. Même vérification que dans l'exercice précédent.

258. — Montrer que l'angle V de deux droites de coefficients angulaires (ou pentes) m et m' est donné par la formule

$$\text{tg}\, V = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

On démontrera d'abord cette formule sans s'inquiéter du signe et l'on déterminera ce signe sur les exemples suivants :

1°	$m = 2$	$m' = 1$
2°	$m = -3$	$m' = -2$
3°	$m = 4$	$m' = -1$
4°	$m = -1$	$m' = 4$
5°	$m = 2$	$m' = -3.$

On fera une figure dans chacun de ces exemples, en faisant passer les droites par l'origine.

259. — Les sommets d'un triangle ABC ont pour coordonnées

A	$x = 2$	$y = 3$
B	$x = 5$	$y = 2$
C	$x = 4$	$y = 6.$

Former les équations des côtés, en déduire leurs pentes, et calculer ensuite les angles du triangle.

On fera la figure en prenant le centimètre pour unité.

260. — Démontrer que pour que deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires m et m' vérifient la relation

$$mm' = -1.$$

Trouver l'équation de la droite menée par l'origine O perpendiculairement sur la droite

$$2x - 3y = 5.$$

Faire la figure en prenant le centimètre pour unité.

261. — Trouver l'équation de la perpendiculaire abaissée du point $x = 2$ $y = 3$ sur la droite

$$2x + 5y + 1 = 0$$

et calculer les coordonnées du pied de cette perpendiculaire

On fera la figure en prenant le centimètre pour unité

262. — Former les équations des hauteurs du triangle ABC de l'exercice 259; calculer les coordonnées des pieds de ces hauteurs et de leur point d'intersection (on vérifiera qu'elles se coupent toutes trois en un même point).

CHAPITRE VI

263. — On appelle équation aux inverses des racines d'une équation donnée du second degré une équation qui admet pour racines $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$, si l'on désigne par x' et x'' les les racines de l'équation donnée. Démontrer que l'équation aux inverses des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est la suivante

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

En déduire une discussion du cas où a est nul, discussion qui devra conduire aux résultats du nº 102.

264. — Étant donnée une équation du second degré, dont les racines sont x' et x''

$$ax^2 + bx + c = 0$$

démontrer que l'équation

$$a(y - h)^2 + b(y - h) + c = 0$$

a pour racines $y' = x' + h$ et $y'' = x'' + h$.

Déterminer h de manière que cette dernière équation soit privée de second terme. En déduire une nouvelle manière d'obtenir la formule de résolution de l'équation du second degré.

265. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} > 0.$$

on multipliera le premier membre par la quantité positive $(a'x + b')^2$.

266. — Résoudre l'inégalité :

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0.$$

267. — Résoudre l'inégalité

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0.$$

268. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} > 0.$$

On multiplie les deux membres par $(a'x^2 + b'x + c)^2$ et on est ramené à l'exercice 267.

269. — Résoudre les inégalités suivantes

$$\frac{2x+3}{3x-5} < 0$$

$$\frac{4x+7}{5x-1} > 0$$

$$\frac{7-2x}{3x-5} > 0$$

$$\frac{5x^2-6x+1}{x-4} > 0$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10} > 0$$

$$\frac{2x^2-6x+5}{3-4x-8x^2} < 0.$$

270. — On donne l'équation du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

et on désigne par m et m' deux nombres donnés. Démontrer que si l'on a

$$f(m)\,f(m') < 0$$

l'équation a certainement une racine comprise entre m et m'. Si l'on a

$$f(m)\,f(m') > 0$$

quatre cas sont à priori possibles : ou bien l'équation n'a pas de racines ; ou bien les deux racines de l'équation sont comprises entre m et m' ; ou bien les racines de l'équation sont toutes deux supérieures à m et à m', ou bien les deux

racines de l'équation sont toutes inférieures à m et à m'. Distinguer entre ces quatre cas en imitant la discussion de la page 230.

271. — Discuter l'équation :

$$(\lambda + 3)\sin^2 x - 4(\lambda + 1)\sin x + 2\lambda = 0.$$

On utilisera l'exercice précédent en prenant $m = 1$, $m' - 1$.

272. — Résoudre l'équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

On pose $x^2 = y$, ce qui donne une équation du second degré en y qui admet deux racines y' et y''; si ces deux racines sont positives, l'équation proposée admet les quatre racines $+\sqrt{y'}, -\sqrt{y'}, +\sqrt{y''}, -\sqrt{y''}$.

273. — Résoudre les équations

$$\begin{aligned}
x^4 - 13x^2 + 36 &= 0\\
x^4 - 4x^2 + 4 &= 0\\
x^4 - 6x^2 + 5 &= 0\\
x^4 - 4x^2 + 3 &= 0\\
x^4 + 2x^2 - 3 &= 0\\
2x^4 + 5x^2 - 7 &= 0\\
x^4 - x^2 + 1 &= 0\\
x^4 + 3x^2 + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

274. — De la discussion de la page 218, déduire le nombre des racines de l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

275. — Résoudre les équations suivantes

$$\frac{x-b}{x-a} + \frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a - b.$$

276. — Discuter l'équation

$$(1 + \lambda)\cos^4 x - 3\lambda\cos^2 x + 1 = 0.$$

Déterminer les valeurs de x pour $\lambda = 1$.

277. — Déterminer a, b, c de manière que la parabole

$$y = ax^2 + bx + c$$

passe par les 3 points A, B, C de coordonnées suivantes :

A	$x = 3$	$y = 4$
B	$x = 1$	$y = 0$
C	$x = -5$	$y = 2.$

La construire en prenant le centimètre pour unité.

CHAPITRE VII

278. — Dans une société de 14 personnes, hommes et femmes, les hommes ont dépensé 240 francs et les femmes également 240 francs. Sachant que chaque homme a dépensé 10 francs de plus que chaque femme on demande de combien d'hommes et de combien de femmes la société était composée?

279. — Un élève a à ajouter un certain nombre à 4 puis à retrancher ce même nombre de 9 et, en fin de compte, à multiplier les résultats. Il se trompe, ajoute le nombre donné à 9 et retranche 4 du nombre donné. Puis il multiplie les résultats. Il se trouve obtenir la solution exacte. Quel était le nombre donné?

280. — Un certain nombre de pièces de 1 franc peuvent être disposées en carré, chaque côté du carré contenant 51 pièces, si le même nombre de pièces était disposé en deux carrés, le côté de l'un de ces carrés comprendrait 21 pièces de plus que le côté de l'autre. Combien de pièces contiennent les côtés de chacun de ces deux derniers carrés?

281. — Deux corps se meuvent l'un vers l'autre des points respectifs A et B et se rencontrent au bout de 32 secondes; si l'un des corps met 24 secondes de plus que l'autre à parcourir la distance de A à B, combien de temps mettent chacun de ces corps à parcourir cette distance?

282. — Un bateau met 4 heures et 12 minutes pour descendre une rivière de 12 kilomètres dans le sens du courant et pour la remonter en allant contre le courant. Sachant que la vitesse du courant est de 3 kilomètres à l'heure, on demande à quelle vitesse ira le bateau dans une eau calme?

283. — Deux hommes partent en même temps pour aller de A à B, distants de 36 kilomètres l'un de l'autre. L'un fait 1 kilomètre à l'heure de plus que l'autre et arrive à B une heure plus tôt que lui. Quelle est la vitesse de chacun de ces hommes?

284. — Dans un rectangle dont les côtés ont respectivement a et b mètres un second rectangle est construit. Les côtés du rectangle intérieur sont également distants des côtés du rectangle extérieur et la surface du rectangle intérieur égale la n^{me} partie de la surface restante du rectangle extérieur. Quelles sont les longueurs des côtés du rectangle intérieur? Application : $a = 70^m$, $b = 52^m,5$, $n = 1$.

285. — Inscrire dans un triangle un rectangle d'aire donnée. — Discuter.

286. — Inscrire dans une sphère un cylindre de révolution dont la surface latérale ait une valeur donnée. — Discuter.

287. — On donne deux droites faisant un angle α et sur l'une d'elles deux points A et B situés respectivement à des distances a et b de leur point d'intersection O. Déterminer sur l'autre droite un point M tel que l'angle $\widehat{AMB}$ ait une valeur donnée. On prendra comme inconnue $OM = x$. — Discuter.

288. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB; soit M un point de cette demi-circonférence et P la projection de M sur AB; déterminer la distance $AP = x$ par la condition que l'on ait

$$AP + PM = mR,$$

m désignant un nombre donné et R le rayon de la demi-circonférence. — Discuter.

289. — Trouver sur une droite donnée un point M tel que la somme de ses distances à deux points F et F′ soit égale à une longueur donnée $2a$. On désignera par P le point d'intersection de la droite donnée avec FF′, par α l'angle $\widehat{MPF}$, par $d - c$ la longueur PF, par $d + c$ la longueur PF′ et par x la longueur PM. — Discuter.

CHAPITRE VIII

290. — Déterminer les coefficients de la relation homographique

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

de telle manière que

pour $x = 1$ l'on ait $y = 3$
pour $x = 2$ l'on ait $y = 5$
pour $x = 4$ l'on ait $y = -2$.

Cette détermination peut se faire d'une infinité de manières, car la valeur de la fraction ne change pas lorsque l'on multiplie a, b, a', b' par un même nombre. On choisira ce multiplicateur de manière que a, b, a', b', soient des nombres entiers premiers entre eux dans leur ensemble et que a soit positif. Le problème est ainsi complètement déterminé. Faire la figure en prenant le centimètre pour unité.

291. — Même question, en supposant que pour $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, l'on ait respectivement $y = 3, -\frac{1}{2}, -\frac{8}{3}$.

292. — Montrer que la relation homographique qui pour $x = x_1, x_2, x_3$ donne $y = y_1, y_2, y_3$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x - x_2}{x - x_3} : \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}.$$

En résolvant cette équation par rapport à y on la mettra sous la forme

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Faire ce calcul et l'appliquer à la solution des exercices 290 et 291.

CHAPITRE IX

293. — Étudier les variations de l'expression

$$y = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Construire la courbe représentative en prenant le centimètre pour unité.

294. — Étudier les variations de

$$y = x^4 - 50x^2 + 49.$$

Construire la courbe représentative en prenant le demi-centimètre pour unité.

295. — Étudier les variations de

$$y = 2x^4 + 3x^2 - 1$$

Construire la courbe représentative en prenant le centimètre pour unité.

296. — Étudier d'une manière générale les variations du trinome bicarré

$$y = ax^4 + bx^2 + c.$$

Discuter.

297. — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \sqrt{x}$$
$$y = \sqrt{x - 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

On remarquera que l'on a pour la première de ces fonctions

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

et l'on multipliera les deux termes de la fraction du second membre par

$$\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}.$$

On suivra une marche analogue pour les autres fonctions proposées.

298. — Trouver la dérivée de $\sqrt{u}$, u étant une fonction de x dont on connaît la dérivée u'.

299. — Lorsqu'un mouvement n'est pas uniforme, on appelle *vitesse* la dérivée de l'espace par rapport au temps; dans la formule de la page 191, on fait tendre Δe et Δt vers zéro. On appelle de même accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Montrer que si l'espace est donné par la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2 + mt + n,$$

où g, m, n, sont des constantes, l'accélération est constante; ce mouvement est dit uniformément varié. — Réciproque.

300. — Calculer la vitesse et l'accélération dans le mouvement représenté par la formule $e = \cos t$. Étendre au cas où l'on a

$$e = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta).$$

CHAPITRE X

301. — Insérer n moyens arithmétiques (ou géométriques) entre deux nombres donnés a et l, c'est former une progression arithmétique (ou géométrique) de $n+2$ termes dont le premier terme est a et le dernier terme l, de telle manière qu'il y ait n termes de la progression entre a et l.

Insérer 3 moyens arithmétiques entre 10 et 50.

302. — Insérer 3 moyens géométriques entre 1 et 10.000.

303. — Insérer 6 moyens arithmétiques entre 10 et 24.

304. — Insérer 4 moyens géométriques entre 2 et 64.

305. — Insérer 20 moyens arithmétiques entre 1,35 et 2,54.

306 — Insérer 7 moyens géométriques entre 1 et 2.

307. — Calculer les sommes des progressions arithmétiques et géométriques que l'on a formées dans les exercices 301 à 306.

308. — Insérer 4 moyens arithmétiques entre 15 et — 50.

309. — Insérer 6 moyens géométriques entre 10 et 3.

310. — Insérer 4 moyens géométriques entre 4 et $-\frac{1}{8}$.

311. — Insérer 6 moyens géométriques entre $+1$ et -1.

312. — Faire la somme des progressions des exercices 308 à 311.

313. — Étant donnée la fraction périodique :

$$0{,}325325325\ldots$$

on demande de l'écrire sous la forme d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{1\,000}$, de faire la somme des n premiers termes de cette progression et d'examiner ce que devient cette somme lorsque n augmente indéfiniment.

314. — Même question pour les fractions

$$0{,}3034303430 34\ldots\ldots$$
$$0{,}2563173173 17\ldots\ldots$$

315. — Soit ABC un triangle, AH la perpendiculaire abaissée de A sur BC, H_1K_1 la perpendiculaire abaissée de H_1 sur AC, K_1H_2 la perpendiculaire abaissée de K_1 sur BC,

H_2K_2 la perpendiculaire abaissée de H_2 sur AC, etc. Calculer la somme de ces perpendiculaires après n opérations. Que devient-elle lorsque n augmente indéfiniment? On fera le calcul en supposant le triangle équilatéral et son côté a égal à 2^m; on prendra successivement $n=4$, $n=10$, $n=1\,000$, $n=1\,000\,000$.

316. — Dans un cercle de rayon R on inscrit un triangle équilatéral; dans ce triangle on inscrit un cercle, puis dans ce cercle un nouveau triangle équilatéral, et ainsi de suite indéfiniment.

On demande de calculer la somme des surfaces des cercles, la somme des surfaces des triangles, la somme des périmètres des triangles. Application : $R=1^m$.

317. — On a des objets cylindriques égaux (morceaux de bois, tuyaux en terre cuite, etc.) que l'on empile de la manière suivante. On en place d'abord un certain nombre à côté les uns des autres sur un plan horizontal, puis on forme une seconde couche horizontale en mettant les objets dans les intervalles qui se trouvent entre ceux de la première, et ainsi de suite, de sorte que chaque couche horizontale renferme un objet de moins que la précédente. Combien y a-t-il d'objets dans la pile, sachant qu'il y a 12 couches horizontales et que la couche supérieure renferme 42 objets.

318. — On a des objets sphériques égaux; on les dispose tout d'abord dans un plan horizontal en forme de triangle équilatéral, en en plaçant 5 sur une ligne, puis 4 sur une ligne parallèle de manière que chacun touche deux des précédents, puis 3 sur une nouvelle ligne parallèle, puis 2, puis 1. On pose ensuite des objets sur les précédents, de manière que chacun d'eux repose sur 3 des précédents; on obtient ainsi un nouveau triangle équilatéral dont chaque côté renferme 4 objets au lieu de 5 et l'on continue de même jusqu'à ce que l'on ait terminé la pyramide triangulaire par un objet unique placé au sommet. Quel sera le nombre total d'objets employés? Quel serait-il si le côté du triangle de base renfermait 45 objets?

1253-06. — Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 9-06.